SINTEZE LYCEUM

C. DINESCU • B. SĂVULESCU

INIȚIERE ÎN MATEMATICA APLICATĂ

EDITURA ALBATROS

Scanned with OKEN Scanner

SINTEZE LYCEUM

C. DINESCU • B. SĂVULESCU

INIȚIERE ÎN MATEMATICA APLICATĂ

EDITURA ALBATROS • BUCUREȘTI • 1984

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Lucrarea de față are drept scop să-i introducă pe cititorii ei, cu diferite niveluri de pregătire, în aplicațiile matematice, într-o manieră inedită. Este adevărat că ultimele decenii au fost caracterizate într-o explozie rapidă de teorii abstracte, dar în același timp și printr-o expansiune de practica acestora. Accesul însă la aceste realizări pe plan matematic rămîne încă la îndemîna unei cerc restrîns.

Punctul de vedere și tematica lucrării reflectă preocuparea autorilor de a găsi posibilitatea înțelegerii avantajelor pe care le oferă matematica unui cerc larg de cititori, începînd chiar cu elevii de liceu. Pentru elevii de liceu, materialul constituie un stimulent în învățarea matematicii, ajutîndu-i în realizarea unei mai bune înțelegeri și a unei suduri între matematica predată în liceu și matematica aplicată. De asemenea, pentru studenții de la cursurile serale, fără frecvență sau post-universitare, precum și pentru ingineri, economiști sau alți specialiști lucrarea constituie un auxiliar prețios în pătrunderea conștientă a matematicii în viața practică.

Ideea de bază, în jurul căreia gravitează întregul material, este de a găsi decizii pe termen scurt la probleme practice prin intermediul unor modele matematice aparținînd algebrei liniare și teoriei mulțimilor.

Astfel, conceptele de sisteme de ecuații liniare, spații vectoriale, matrice și mulțimi învățate în liceu sînt puse în adevarata lor practică.

Prin lucrarea de față, cercurile de elevi vor avea un material atractiv, iar celelalte categorii de cititori vor dispune de un material care să le trezească încrederea în posibilitățile de aplicare practică a matematicilor din liceu.

În scopul atingerii obiectivelor amintite, lucrarea, reluînd teoria matricelor, vectorilor și sistemelor liniare și prezentînd-o

Scanned with OKEN Scanner

într-o manieră accesibilă, construiește o gamă largă de procedee și metode matematice pe care le trimite la probleme de interes practic.

Noțiunile sînt prezentate treptat în funcție de gradul de dificultate, iar necesitatea introducerii acestora este justificată cu numeroase exemple practice.

Avem ferma convingere că maniera în care este concepută lucrarea va duce la creșterea interesului pentru matematică, arătînd mai clar universalitatea aplicațiilor ei.

AUTORII

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul I

PROPOZIȚII. MULȚIMI. MATRICE.

I.1. Introducere

În acest capitol vor fi prezentate mai întîi cîteva noțiuni de logică matematică, ce sînt necesare înțelegerii conștiente a metodelor ce se aplică în rezolvarea problemelor de matematică. În urma parcurgerii acestor noțiuni, cititorul va desprinde unele reguli, cu ajutorul cărora va fi pregătit să conducă cu prudență rezolvarea unei probleme complexe de matematică, astfel încît să nu piardă din cercetare anumite cazuri și să nu scoată cu ușurință unele concluzii ce pot să nu fie adevărate în anumite situații.

Ultimele patru paragrafe au fost repartizate unor noțiuni din teoria mulțimilor și a matricelor. Noțiunile și metodele de lucru, prezentate în toate paragrafele acestui capitol, au fost exemplificate cît mai variat, punîndu-se accent asupra aplicațiilor mai apropiate de teoria sistemelor de ecuații, din algebră.

I.2. Propoziții

După cum știm, în cadrul învățării matematicii, întîlnim la tot pasul afirmații de diferite tipuri, asupra cantităților cu care lucrăm. În cele ce urmează, vom privi aceste afirmații sub forma lor cea mai generală, abstractă, așa cum sînt ele cercetate în logica matematică.

Se numește *judecată* o formă de cunoaștere, prin care se afirmă sau se neagă ceva, despre un obiect, despre o ființă, sau despre o noțiune abstractă. O judecată poate fi exprimată lingvistic printr-o propoziție. Astfel, se spune că o *propoziție* este o categorie lingvistică prin care se comunică ceva despre un obiect, o ființă sau despre o noțiune abstractă.

Pentru a deosebi o propoziție, inclusă într-un text, de restul textului, vom obișnui adesea să închidem această pro-

Scanned with OKEN Scanner

poziție între ghilimele, notînd-o simbolic cu o literă mică; pentru aceasta, vom folosi de preferință literele p, q, r, s...

Exemple de propoziții

p: „Soarele este o stea" r: „Peștele este un mamifer".
q: „$2 \cdot 2 = 4$" s: „$6 - 2 = 5$"

După cum se vede și din exemplele date, o anumită propoziție poate fi adevărată sau falsă, fapt pe care îl vom exprima matematic, prin așa numita *valoare de adevăr*, atașată fiecărei propoziții în parte. În acest sens, vom considera două valori de adevăr ca fiind posibile pentru o propoziție oarecare, valori notate simbolic astfel:

a, dacă propoziția este adevărată,
f, dacă propoziția este falsă.

Aceste valori de adevăr mai sînt reprezentate, în logica matematică, respectiv prin valorile numerice 1 și 0.

Conform celor afirmate mai sus, notînd cu π mulțimea tuturor propozițiilor, ce pot fi adevărate sau false, putem considera că s-a definit o funcție pe această mulțime și cu valori în mulțimea $\{a, f\}$, funcție pe care o notăm cu v și care se numește *funcție de adevăr*:

$$v: \pi \to \{a, f\}$$

Vom reprezenta faptul, că valoarea de adevăr a unei propoziții p este a, respectiv f, prin scrierea: $v(p) = a$, respectiv: $v(p) = f$ și citim:

„Propoziția p este adevărată", respectiv „propoziția p este falsă"

În exemplele de propoziții date mai sus putem preciza că:

— propozițiile p și q au valoarea de adevăr a, ceea ce se scrie sub forma $v(p) = a$, respectiv $v(q) = a$,

— propozițiile r și s au valoarea de adevăr f, ceea ce se scrie sub forma $v(r) = f$, respectiv $v(s) = f$.

În strînsă legătură cu noțiunea de propoziție, se află noțiunea de *funcție propozițională*, care conține o parte variabilă. Datorită existenței părții variabile, despre o funcție propozițională nu putem spune că este adevărată sau falsă, dar ea se transformă într-o propoziție adevărată sau falsă; prin operația de *substituție* (înlocuire, sau fixare) a întregii părți variabile, prin date, sau valori particulare. Evident, în cazul unei funcții propoziționale, ne putem pune problema dacă există astfel de valori particulare, pentru care ea se trans-

Scanned with OKEN Scanner

formă în propoziții adevărate. În cazul cînd există cel puțin o valoare particulară, pentru care funcția propozițională se transformă într-o propoziție adevărată, spunem că ea este *realizabilă*. În caz contrar, cînd nu există nici o valoare particulară, a părții variabile, pentru care funcția propozițională să se transforme în propoziție adevărată, spunem că ea este *irealizabilă*.

Exemple de funcții propoziționale:

f_1: „într-una din zilele anului 1977, a nins pe vîrful Omu"
f_2: „$5x - 3 = 7$, unde x este un număr real"
f_3: „$x \pm y = 10$, unde x și y sînt numere reale"
f_4: „$x + x = 2x$, unde x este un număr real",
f_5: „$x < x$, unde x este un număr real".

După cum se vede, funcția propozițională f_1 face referiri la una din zilele anului 1977, nedeterminată încă. Evident, dacă vom înlocui această dată, cu una din zilele în care într-adevăr a nins pe vîrful Omu, vom obține o propoziție adevărată, iar dacă o vom înlocui cu una din zilele în care nu a nins, obținem o propoziție falsă. În cazul funcției propoziționale f_2 substituind pe x prin 2, se obține propoziția adevărată „$5 \cdot 2 - 3 = 7$", iar substituind pe x prin altă valoare, de exemplu prin 3, se obține o propoziție falsă, în cazul ales „$5 \cdot 4 - 3 = 7$". Asemănător, funcția propozițională f_3 devine o propoziție adevărată prin oricare din substituțiile: $x = 2$ și $y = 8$; $x = 11$ și $y = -1$; $x = \sqrt{2}$ și $y = 10 - \sqrt{2}$, etc. dar devine o propoziție falsă dacă substituim, de pildă, pe x prin 6 și pe y prin -2. În sfîrșit, funcția propozițională f_4 devine o propoziție adevărată prin înlocuirea lui x prin orice valoare numerică, iar funcția propozițională f_5 devine o propoziție falsă pentru orice valoare numerică a lui x (este irealizabilă).

Logica, în care se consideră că propozițiile pot avea numai două valori de adevăr, se numește *logică bivalentă*, sau *logică clasică* și numai la ea ne vom referi în lucrarea de față. Menționăm totuși, că există și alte tipuri de logică. Astfel sînt logicile modale, în care se admite că unele propoziții pot fi nici cert adevărate, nici cert false, făcînd să corespundă acestor propoziții diferite grade de adevăr.

Cu ajutorul unor propoziții și folosind anumite cuvinte de legătură, putem forma alte propoziții, numite *formule ale calculului propozițional*. Propozițiile rezultate pot fi și ele adevărate sau false, în funcție de adevărul sau falsitatea pro-

Scanned with OKEN Scanner

poziţiilor de la care s-a pornit, conform unor reguli bine stabilite. Se definesc astfel, diferite operaţii cu propoziţii, proprietăţile acestor operaţii fiind studiate de *algebrica logicii*. În cele ce urmează, vom prezenta numai cîteva dintre aceste operaţii, a căror cunoaştere are o deosebită importanţă pentru înţelegerea conştientă a unor metode de rezolvare, folosite în matematică.

Negaţia. Fiind dată o propoziţie p, prin negarea celor precizate de ea, putem obţine o altă propoziţie, care se notează cu $\bar{p}$ şi care:

— este falsă, atunci cînd p este adevărată,

— este adevărată, atunci cînd p este falsă.

Reprezentăm aceste două posibilităţi printr-o tabelă de forma următoare (tabelă de adevăr):

p	a	f
$\bar{p}$	f	a

Lingvistic, negaţia se exprimă printr-unul din cuvintele „nu" sau „non". Astfel, citim propoziţia $\bar{p}$, prin: „nu este adevărată p", sau simplu, prin: „non p".

Exemple de propoziţii obţinute prin negaţie

1. Dacă notăm cu p propoziţia evident adevărată „$2 < 5$", prin negarea ei, se obţine propoziţia $\bar{p}$, de forma „2 nu este mai mic decît 5", sau sub formă echivalentă „$2 \geqslant 5$", ceea ce reprezintă o propoziţie falsă.

2. Dacă negăm propoziţia falsă „$2 = 3$", obţinem propoziţia adevărată "$2 \neq 3$".

Operaţia de negaţie, a unei propoziţii oarecare p, trebuie efectuată cu mare atenţie, astfel încît propoziţia $\bar{p}$ să fie adevărată ori de cîte ori propoziţia p este falsă şi nu numai în anumite situaţii de acest fel. De exemplu, dacă notăm cu p şi q respectiv, propoziţiile:

p: „Obiectul cercetat este alb"

q: „Obiectul cercetat este negru",

este clar că propoziţia q nu poate reprezenta negaţia propoziţiei p, deoarece propoziţia $\bar{p}$ poate fi adevărată şi în cazurile cînd obiectul cercetat are şi alte culori decît alb şi negru. De asemenea, dacă considerăm propoziţia „Triunghiul ABC are o latură a cărei lungime este exprimată printr-un număr raţional ", negaţia acestei propoziţii nu este „triunghiul ABC are o latură a cărei lungime nu este exprimată printr-un

Scanned with OKEN Scanner

număr rațional", ci este propoziția „niciuna dintre laturile triunghiului ABC nu are lungimea exprimată printr-un număr rațional".

Conjuncția, sau produsul logic. Fiind date propozițiile p și q, cu ajutorul lor și al cuvîntului de legătură „și", se poate obține o nouă propoziție, care se notează simbolic prin $p \wedge q$ și pe care o citim: „p și q".

Această nouă propoziție, numită conjuncția propozițiilor p și q, se definește prin următoarele valori de adevăr pe care le poate avea, în funcție de valorile de adevăr ale propozițiilor p și q:

— dacă p și q sînt ambele adevărate, propoziția $p \wedge q$ este adevărată;

— dacă p este adevărată și q este falsă, propoziția $p \wedge q$ este falsă;

— dacă p este falsă și q este adevărată, propoziția $p \wedge q$ este falsă;

— dacă p și q sînt ambele false, propoziția $p \wedge q$ este falsă.

Cele patru posibilități, descrise mai sus, se pot reprezenta printr-un tabel de adevăr, de forma următoare:

p	a	a	f	f
q	a	f	a	f
$p \wedge q$	a	f	f	f

După cum se vede, conjuncția $p \wedge q$ este adevărată numai atunci cînd ambele propoziții, p și q, sînt adevărate, în orice altă situație fiind falsă. Putem considera, mai general, operația de conjuncție aplicată mai multor propoziții, caz în care rezultatul este o propoziție adevărată numai dacă toate propozițiile în cauză sînt adevărate și este falsă dacă cel puțin una dintre aceste propoziții este falsă.

Exemple de propoziții obținute prin operația de conjuncție.

1. Considerînd propozițiile:

p: „patrulaterul $ABCD$ are laturile paralele două cîte două",

q: „patrulaterul $ABCD$ are diagonalele perpendiculare", propoziția $p \wedge q$ este următoarea:

$p \wedge q$: „patrulaterul $ABCD$ are laturie paralele două cîte două și diagonalele perpendiculare", sau, ceea ce este tot una, conform celor cunoscute din geometria plană: „patrulaterul $ABCD$ este romb".

Scanned with OKEN Scanner

2. Fie valorile reale x și y, nefixate, precum și funcțiile propoziționale: f_1: „$x + y = 7$“; f_2: „$x - y = 3$“.

Aplicînd operația de conjuncție, se obține funcția propozițională: $f_1 \wedge f_2$: „$x + y = 7$ și $x - y = 3$“, care devine propoziție adevărată pentru astfel de valori ale lui x și y, care fac ca atît funcția propozițională f_1, cît și funcția propozițională f_2, să devină propoziții adevărate.

În aplicațiile algebrei, se obișnuiește să se înlocuiască simbolul conjuncției logice printr-o acoladă, ce cuprinde toate funcțiile propoziționale cu care se efectuează conjuncția respectivă. Astfel, funcția propozițională $f_1 \wedge f_2$, din cel de al doilea exemplu de mai sus, se poate-scrie sub forma următoare:

$$\begin{cases} „x + y = 7“, \\ „x - y = 3“ \end{cases}$$

cel mai adesea renunțîndu-se la ghilimele. După cum se știe, această noțiune este folosită în mod curent pentru scrierea sistemelor de ecuații sau inecuații.

Disjuncția, sau suma logică. Fiind date propozițiile p și q, cu ajutorul lor și al cuvîntului de legătură „sau“ se poate obține o nouă propoziție, care se notează simbolic sub forma $p \vee q$ și pe care o citim: p sau q“.

Această propoziție, numită disjuncția propozițiilor p și q, se definește prin următoarele valori de adevăr pe care le poate avea, în funcție de valorile de adevăr ale propozițiilor p și q:

— dacă p și q sînt ambele adevărate, propoziția $p \vee q$ este adevărată,

— dacă p este adevărată și q este falsă, propoziția $p \vee q$ este adevărată,

— dacă p este falsă și q este adevărată, propoziția $p \vee q$ este adevărată,

— dacă p și q sînt ambele false, propoziția $p \vee q$ este falsă. Aceste patru posibilități se pot reprezenta prin următorul tabel de adevăr:

p	a	a	f	f
q	a	f	a	f
$p \vee q$	a	a	a	f

Se observă că propoziția $p \vee q$ este adevărată dacă cel puțin una dintre cele două propoziții, p și q, este adevărată. Prin

Scanned with OKEN Scanner

urmare, cuvîntul de legătură „sau" este luat, în operația descrisă, în sensul următor: „sau p sau q, sau și p și q", neexcluzîndu-se situația cînd și p și q sînt adevărate, evident în cazul cînd această posibilitate există.

Putem considera operația de disjuncție aplicată și la mai mult de două propoziții, rezultatul fiind o propoziție adevărată numai dacă cel puțin una dintre propozițiile în cauză este adevărată.

Exemple de propoziții obținute prin operația de disjuncție

1. Considerînd următoarele propoziții:

p: „triunghiul ABC este isoscel; q: „triunghiul ABC este dreptunghic", propoziția $p \vee q$ se exprimă astfel:

$p \vee q$: „triunghiul ABC este isoscel sau dreptunghic" fiind adevărată fie dacă triunghiul ABC este isoscel, fie dacă triunghiul este dreptunghic, fie dacă este și isoscel și dreptunghic.

2. Să considerăm două valori reale x și y, nefixate, precum și funcția propozițională: „$x(y - 1) = 0$". Observăm că această funcție propozițională se mai poate scrie sub forma următoare: „$x = 0$" $\vee$ „$y - 1 = 0$",
deoarece ea este adevărată numai în următoarele situații, în raport cu adevărul cuprins în funcțiile propoziționale „$x = 0$" și „$y - 1 = 0$".

— „$x = 0$", iar „$y - 1 = 0$",
— „$x = 0$", iar „$y - 1 \neq 0$",
— „$x \neq 0$", iar „$y - 1 = 0$".

3. Fie x un număr real, nefixat și funcția propozițională: „$(x - 2) \cdot (x - 5) = 0$". Această funcție propozițională se poate scrie și sub forma următoare: „$x - 2 = 0$" $\vee$ „$x - 5 = 0$". Se observă că, de această dată, nu mai există posibilitatea ca ambele funcții propoziționale, „$x - 2 = 0$" și „$x - 5 = 0$", să devină propoziții adevărate simultan (pentru aceeași valoare reală a lui x), rămînînd numai următoarele posibilități:

— „$x - 2 = 0$", iar „$x - 5 \neq 0$",
— „$x - 2 \neq 0$", iar „$x - 5 = 0$".

În aplicațiile algebrei, legate de rezolvarea ecuațiilor și a sistemelor de ecuații, întîlnim adesea situații similare cu cele cuprinse în ultimele două exemple, date mai sus. Pentru a nu îngreuna scrierea, prin folosirea simbolurilor logice și a

Scanned with OKEN Scanner

operațiilor cu ele, vom adopta o altă notație a disjuncției, pe care o prezentăm prin exemplificare, asupra funcțiilor propoziționale din cel de al doilea exemplu de mai sus. Astfel, despărțim funcția propozițională: „$x(y-1)=0$" în două posibilități, notate simbolic cu I și II, posibilități care nu se exclud reciproc, astfel:

$$\text{I: „}x=0\text{"} \quad \text{II: „}y-1=0\text{"}.$$

Vom considera că între cele două posibilități există particula „sau".

Dacă funcția propozițională „$x(y-1)=0$" face parte dintr-un complex de funcții propoziționale, ce trebuie să fie adevărate simultan, cele două posibilități, I și II, vor repeta acest complex, cu excepția funcției propoziționale în cauză, care va fi înlocuită în posibilitatea I prin „$x=0$", iar în posibilitatea II prin „$y-1=0$". De pildă, dacă complexul de funcții propoziționale este reprezentat de sistemul:

$$\begin{cases} x(y-1)=0, \\ x^2+y^2-4\geqslant 0, \\ x+y\neq 5, \end{cases}$$

atunci el va fi înlocuit prin următoarele posibilități, între care vom înțelege că există particula „sau" (operația de disjuncție):

$$\text{I:}\begin{cases} x=0, \\ x^2+y^2-4\geqslant 0, \\ x+y\neq 5, \end{cases} \qquad \text{II:}\begin{cases} y-1=0, \\ x^2+y^2-4\geqslant 0, \\ x+y\neq 5 \end{cases}.$$

Implicația. Fiind date propozițiile p și q, din ele putem construi o altă propoziție, cu ajutorul cuvîntului de legătură „deci". Noua propoziție se notează cu $p\Rightarrow q$ și se citește: „p, deci q"; sau: „din p rezultă q"; sau încă: „dacă p, atunci q"; sau mai dezvoltat: „propoziția p implică propoziția q".

Implicația $p\Rightarrow q$ se definește prin următoarele valori de adevăr, în funcție de valorile de adevăr ale propozițiilor p și q:

— dacă p și q sînt ambele adevărate, propoziția $p\Rightarrow q$ este adevărată;

— dacă p este adevărată și q este falsă, propoziția $p\Rightarrow q$ este falsă;

Scanned with OKEN Scanner

— dacă p este falsă și q este adevărată, propoziția $p \Rightarrow q$ este adevărată;

— dacă p și q sînt ambele false, propoziția $p \Rightarrow q$ este adevărată. Aceste patru posibilități se pot reprezenta prin următorul tabel de adevăr:

p	a	a	f	f
q	a	f	a	f
$p \Rightarrow q$	a	f	a	a

După cum se vede și din tabel, implicația $p \Rightarrow q$ este o propoziție falsă numai atunci cînd propoziția p este adevărată și propoziția q este falsă. De asemenea, se observă că, prin definiția dată, o propoziție falsă poate implica orice fel de propoziție, adevărată sau falsă.

Implicația are un rol deosebit de important în demonstrațiile matematice, rol bazat pe observația că dacă propoziția $p \Rightarrow q$ este adevărată și p este adevărată, atunci și q este adevărată. În cadrul acestei operații, trebuie să ținem seama de ordinea propozițiilor cu care se operează, pentru două propoziții, p și q, putînd avea două implicații: $p \Rightarrow q$ (implicația directă) și $q \Rightarrow p$ (implicația inversă).

Exemple de propoziții obținute prin operația de implicație

1. Propoziția rezultată din operația: „$5 < 8$“ $\Rightarrow$ „$6 < 9$“ este adevărată, deoarece ea arată că o propoziție adevărată implică tot o propoziție adevărată.

2. Propoziția rezultată din operația: „$-3 = 3$“ $\Rightarrow$ „$9 = 9$“ este de asemenea adevărată, deoarece prin ea, o propoziție falsă implică o propoziție adevărată.

3. Fie un număr real oarecare, notat cu x, precum și următoarele funcții propoziționale: f_1 : „$x = 2$“; f_2 : „$x^2 = 4$“, din care cea de a doua rezultă prin ridicarea la pătrat a egalității exprimate de prima. Observăm că implicația $f_1 \Rightarrow f_2$ este adevărată pentru orice valoare numerică a variabilei x. În acest sens, dăm cîteva exemple, obținute prin substituirea lui x prin diferite valori numerice:

— pentru $x = 2$, obținem propoziția adevărată „$2 = 2$“ $\Rightarrow$ „$4 = 4$“,

— pentru $x = -2$, obținem propoziția adevărată „$-2 = 2$“ $\Rightarrow$ „$4 = 4$“,

— pentru $x = 5$, obținem propoziția adevărată „$5 = 2$“ $\Rightarrow$ „$25 = 4$“.

Scanned with OKEN Scanner

Considerînd însă implicația inversă, $f_2 \Rightarrow f_1$, observăm că ea este adevărată pentru diferite valori ale lui x, cu excepția valorii $x = -2$, pentru care se ajunge la situația ca o propoziție adevărată să implice o propoziție falsă:

$$„4 = 4" \Rightarrow „-2 = 2"$$

Echivalența logică. Fiind date propozițiile p și q, din ele se poate obține o altă propoziție, folosind expresia lingvistică „dacă și numai dacă". Noua propoziție se notează simbolic prin $p \Leftrightarrow q$ și se citește sub forma: „p, dacă și numai dacă q" sau „p este echivalentă cu q". Valorile de adevăr, ale rezultatului acestei operații, în funcție de valorile de adevăr ale propozițiilor p și q, sînt prin definiție următoarele:

— dacă q și p sînt ambele adevărate propoziția $p \Leftrightarrow q$ este adevărată;

— dacă p este adevărată și q este falsă, propoziția $p \Leftrightarrow q$ este falsă;

— dacă p este falsă și q este adevărată, popoziția $p \Leftrightarrow q$ este falsă;

— dacă p și q sînt ambele false, propoziția $p \Leftrightarrow q$ este adevărată.

Posibilitățile descrise se pot reprezenta prin tabelul de adevăr ce urmează:

p	a	a	f	f
q	a	f	a	f
$p \Leftrightarrow q$	a	f	f	a

Din definiția dată, rezultă că propoziția $p \Leftrightarrow q$ este adevărată numai dacă propozițiile p și q sînt ambele adevărate, sau ambele false (au aceeași valoare de adevăr). În cele ce urmează, vom arăta că echivalența logică a două propoziții, p și q, poate fi considerată ca fiind formată din implicațiile $p \Rightarrow q$ și $q \Rightarrow p$ (adică implicația directă și implicația inversă), proprietate ce se poate scrie sub forma următoare:

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$$

Această concluzie rezultă din tabelul de mai jos, în care s-au reprezentat valorile de adevăr ale propozițiilor $p \Rightarrow q$ și $q \Rightarrow p$, în cele patru cazuri posibile pentru valorile de adevăr

Scanned with OKEN Scanner

ale propozițiilor p și q, precum și valorile de adevăr ale propoziției $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$:

p	a	a	f	f
q	a	f	a	f
$p \Rightarrow q$	a	f	a	a
$q \Rightarrow p$	a	a	f	a
$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	a	f	f	a

Se observă că valorile de adevăr, de pe ultima linie a tabelului, coincid cu rezultatele operației $p \Leftrightarrow q$, în toate cele patru cazuri posibile, ceea ce justifică afirmația făcută mai sus. Conform proprietății demonstrate, pentru a arăta echivalența a două propoziții, p și q, putem proceda astfel:

— arătăm mai întîi, că din propoziția p rezultă propoziția q,

— arătăm apoi, că din propoziția q rezultă propoziția p.

Exemple de propoziții echivalente și neechivalente

1. Fie propozițiile p și q ce urmează:

p: „triunghiul ABC are toate laturile egale",

q: „triunghiul ABC are toate unghiurile egale".

Din geometria plană se cunoaște că: $p \Rightarrow q$ și $q \Rightarrow p$, deci putem spune că: $p \Leftrightarrow q$.

2. Fie valoarea x reală oarecare și funcțiile propoziționale: f_1 : „$x - 2 = 5$"; f_2 : „$x = 7$".

Se observă că pentru valoarea $x = 7$, ambele conduc la propoziții adevărate, iar pentru orice valoare $x \neq 7$, ambele conduc la propoziții false. În consecință, putem spune că ele sînt echivalente și scriem, renunțînd la ghilimele: $x - 2 = 5 \Leftrightarrow x = 7$. Funcțiile propoziționale, de felul celor cercetate aici, se mai numesc și *ecuații echivalente.*

3. Fie o valoare reală oarecare, x, precum și funcțiile propoziționale: f_1: „$x = 9$"; f_2: „$x^2 = 9x$", cea de a doua fiind obținută prin înmulțirea ambelor părți ale egalității exprimate de prima, cu x. Se observă ușor că avem pentru orice valoare reală a lui x: $p \Rightarrow q$. Implicația inversă nu este însă verificată pentru orice valoare a lui x, deoarece pentru $x = 0$:

— funcția propozițională f_2 se transformă în propoziția falsă „$0 = 9$";

— funcția propozițională f_1 se transformă în propoziția adevărată „$0 = 0$".

Rezultă că cele două ecuații, reprezentate prin cele două funcții propoziționale date, nu sînt echivalente.

Scanned with OKEN Scanner

4. Considerînd numerele reale x și y, se verifică, pentru orice astfel de valori, implicația: „$x = y$" $\Rightarrow$ „$x^2 = y^2$". Implicația inversă nu se verifică, oricare ar fi valorile variabilelor x și y, putînd scrie însă: „$x^2 = y^2$" $\Rightarrow$ („$x = y$" $\vee$ $\vee$ „$x = -y$"). Rezultă că cele două funcții propoziționale, date inițial, nu sînt echivalente. Putem însă scrie următoarea echivalență, ușor de verificat: „$x^2 = y^2$ $\Leftrightarrow$ („$x = y$ $\vee$ „$x = -y$").

Probleme date spre rezolvare

1. Să se precizeze care sînt valorile de adevăr ale următoarelor propoziții:
P_1 : „$-5 < -2$"
P_2 : „orice paralelogram are diagonalele perpendiculare"
P_3 : „3 este un număr natural"
P_4 : „$2 \neq 2$"
P_5 : „$3 \neq 4$"

2. Să se aplice operația de negație următoarelor propoziții:
P_1: „lungimile celor trei laturi ale unui triunghi sînt diferite două cîte două",
P_2: „printre paralelograme există unele care au unghiuri drepte"
P_3: „$5 > -1$"

3. Propoziția „triunghiul ABC este scalen" poate fi considerată ca negație a propoziției „triunghiul ABC este echilateral", sau a propoziției „triunghiul ABC este isoscel"?

4. Să se demonstreze, prin cercetarea diferitelor posibilități, asupra valorilor de adevăr ale propozițiilor p, q, r, următoarele proprietăți ale operațiilor logice:

a) $\bar{\bar{p}} \Leftrightarrow p$ (negația negației unei propoziții este echivalentă cu propoziția dată).
b) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ (comutativitatea conjuncției).
c) $p \vee q \Leftrightarrow p \vee q$ (comutativitatea disjuncției).
d) $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ (asociativitatea conjuncției).
e) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ (asociativitatea disjuncției).
f) $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ (distribuitivitatea conjuncției, față de disjuncție).

5. Să se demonstreze următoarele două proprietăți ale operațiilor de negație, conjuncție și de disjuncție, numite relațiile lui De Morgan:

a) $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$.

b) $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$.

Scanned with OKEN Scanner

6. Să se arate că operația de implicație poate fi scrisă în mod echivalent, cu ajutorul operațiilor de conjuncție și negație, astfel:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \overline{p \wedge \bar{q}}.$$

7. Să se demonstreze următoarea proprietate a operației de implicație, care justifică metoda matematică de reducere la absurd:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$$

Pentru aceasta, va fi suficient să se arate că:

$$v(p \Rightarrow q) = v(\bar{q} \Rightarrow \bar{p}).$$

I.3. Mulțimi și submulțimi

După cum se știe, noțiunea de *mulțime* este o noțiune primară, neputînd fi definită cu ajutorul unor noțiuni mai simple, De aceea, conceptul de mulțime se formează fie printr-o descriere cu ajutorul exemplelor, fie prin comparație, folosind o serie de cuvinte, al căror înțeles se apropie de cel al noțiunii de mulțime (totalitate, colecție, grămadă etc.). Astfel putem vorbi despre mulțime, ca o colecție de obiecte, ființe sau noțiuni abstracte, acestea avînd o proprietate comună, sau nu. Obiectele, ființele, sau noțiunile abstracte, care formează o mulțime, se numesc elemente ale acelei mulțimi. Mulțimile se reprezintă simbolic, de obicei, prin litere mari, de tipar sau ronde ($A, B, C, M, N, P, R, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{P}$ etc.), iar elementele prin litere mici, latine sau grecești ($a, b, c, m, n, \alpha, \beta$ etc.). Evident, acest mod de notare nu se va păstra, atunci cînd anumite semnificații ale elementelor impun folosirea altor notații.

O mulțime este perfect determinată atunci cînd, după descrierea sa, este posibil să decidem dacă un obiect, o ființă, sau o noțiune abstractă face parte sau nu din ea. În acest sens, pentru a descrie complet o mulțime, putem proceda în două moduri și anume:

— prin enumerarea elementelor ce formează mulțimea, caz în care aceste elemente se scriu, cu virgule între ele, între două acolade;

— prin enunțarea unei proprietăți, pe care o au toate elementele mulțimii și numai ele, caz în care această proprietate se poate scrie fie separat, fie între două acolade.

Scanned with OKEN Scanner

Din punct de vedere al numărului de elemente, pe care le poate conține o mulțime, putem deosebi două tipuri distincte de mulțimi și anume:

— mulțimi finite, fiecare dintre acestea avînd cîte un număr finit de elemente;

— mulțimi infinite, fiecare dintre acestea avînd un număr infinit de elemente.

Accentuăm asupra faptului că există posibilitatea ca o mulțime finită să aibă un singur element (cum este, de exemplu în mulțimea sateliților naturali ai Pămîntului), ori nici un element (de exemplu, mulțimea gazelor ce nu se pot lichefia). În acest din urmă caz, considerăm, prin convenție, că avem de-a face tot cu o mulțime, care se numește mulțime vidă și se notează cu simbolul $\emptyset$.

Exemple de mulțimi

1. Mulțimea:

$$A = \{\text{cetățeni ai R.S. România}\}$$

este dată printr-o proprietate comună a elementelor sale, astfel încît, dată fiind o persoană oarecare de pe globul pămîntesc, putem preciza dacă ea face parte sau nu, din această mulțime. Evident, mulțimea A este o mulțime finită.

2. Mulțimea:

$$B = \{\text{rădăcini reale ale ecuației } x^4 - 1 = 0\}$$

este dată de asemenea printr-o proprietate a elementelor sale. Cunoscînd că ecuația $x^4 - 1 = 0$ are numai două rădăcini reale nenule, -1 și $+1$, mulțimea B se mai poate scrie, prin enumerarea elementelor sale, sub forma următoare:

$$B = \{-1;\ 1\}.$$

Această mulțime este de asemenea o mulțime finită.

3. Mulțimea:

$$C = \{\text{numere naturale}\}$$

dată astfel, printr-o proprietate comună a elementelor sale, este o mulțime infinită. Ea se poate scrie și prin enumerare, sub forma:

$$C = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots\},$$

cele trei puncte, prin care se termină enumerarea, indicînd că succesiunea de numere naturale continuă în același mod oricît de mult, neterminîndu-se niciodată. După cum se știe, această mulțime se notează în mod obișnuit cu N.

Scanned with OKEN Scanner

4. Fiind dat un segment de dreaptă PQ, mulțimea:

$$D = \{\text{puncte ale segmentului } PQ\}$$

este o mulțime infinită. Această mulțime nu se poate scrie prin enumerare, aceasta fiind o afirmație ce se demonstrează prin metode matematice.

5. Alte exemple de mulțimi infinite: mulțimea tuturor atomilor din Univers, mulțimea tuturor paralelogramelor dintr-un plan etc.

Menționăm că, atunci cînd o mulțime este descrisă prin enumerarea elementelor sale, nu interesează ordinea în care apar aceste elemente, fiecare element fiind scris cîte o singură dată, chiar dacă el se repetă în problema cercetată. Astfel, dacă notăm cu M mulțimea literelor, cu ajutorul cărora se scrie cuvîntul ANANAS, această mulțime conține trei elemente, mai precis literele A, N și S, mulțimea însăși putînd fi scrisă fie sub forma: $M = \{A, N, S\}$, fie sub forma: $M = \{N, S, A\}$, fie sub orice altă formă, ce rezultă prin permutarea celor trei litere precizate. Spunem că toate aceste forme de scriere reprezintă *mulțimi egale* (care au aceleași elemente).

Pentru mulțimile ce se definesc printr-o proprietate comună a elementelor ce le compun, se folosește în mod curent o notație mai potrivită din punct de vedere matematic și pe care o vom prezenta în continuare. În acest scop, să presupunem că s-a dat o mulțime M, ale cărei elemente — și numai ele — au o proprietate P. Notînd cu x un element oarecare al acestei mulțimi *(element variabil)* propoziția: „x are proprietatea P" exprimă pe x ca un *element generic* al mulțimii M. De aceea, mulțimea M se notează prin elementul generic x al ei, separat printr-o bară verticală de proprietatea P a sa, ambele fiind scrise între acolade, în modul următor: $M = \{x \mid x \text{ are proprietatea } P\}$. Mai mult, ori de cîte ori trebuie să efectuăm anumite operații cu elemente ale mulțimii M, vom lucra în general cu elementul generic x, acesta putînd fi apoi înlocuit (substituit) în rezultate, cu oricare dintre elementele mulțimii (și numai cu acestea). De aceea, spunea că x este un element variabil, a cărui *mulțime de substituție (domeniu admis)* este M.

Exemple de mulțimi date cu ajutorul unui element generic

1. Fiind dat un segment de dreaptă AB, putem considera mulțimea infinită de forma: $\{x \mid x \text{ este punct pe segmentul } AB\}$, care nu este alta decît mulțimea tuturor punctelor de pe segmentul dat.

Scanned with OKEN Scanner

2. Fie mulțimea: $M = \{x \mid x^2 - 4 = 0\}$. Se observă că această mulțime se poate scrie, prin enumerare astfel: $M = \{-2; 2\}$.

3. Mulțimea: $M = \{x \mid x \vdots 5\}$ este mulțimea tuturor multiplilor lui cinci, putînd fi scrisă prin enumerare astfel: $M = \{5, 10, 15, 20, 25...\}$. Aceasta este o mulțime infinită.

În scopul folosirii unor imagini intuitive, asupra relațiilor dintre mulțimi, ca și asupra operațiilor cu ele, se obișnuiește să se reprezinte geometric mulțimile, prin figuri plane închise, de exemplu prin cercuri, ca în figura I.3.1, unde este reprezen-

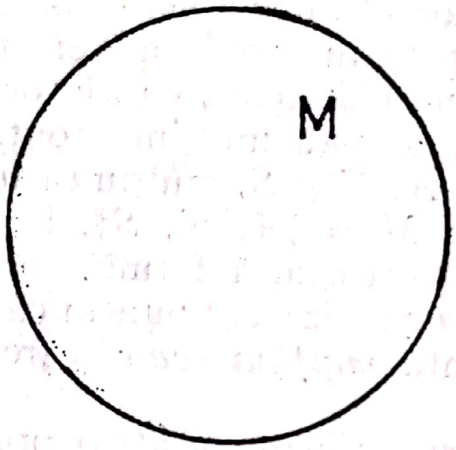


Fig. I.3.1

tată o mulțime M, finită sau infinită. Asemenea figuri poartă numele de *diagramele lui Venn* și vor fi folosite în continuare pentru a ilustra unele din noțiunile pe care le vom introduce.

Pentru a preciza că un element ar face parte dintr-o mulțime M, se folosește semnul $\in$ numit semnul de apartenență. Scriem $a \in M$ și citim: „elementul a aparține mulțimii „M".

În caz contrar, dacă un element a nu face parte dintr-o mulțime M, scriem $A \notin M$ și citim: „elementul a nu aparține mulțimii „M".

Exemple de folosire a semnului de apartenență

1. Dacă notăm cu M mulțimea: $M =$ {rădăcini reale ale ecuației $x^4 - 1 = 0$}, putem scrie: $1 \in M$, deoarece 1 este o rădăcină reală a ecuației date; $3 \notin M$, deoarece 3 nu este o rădăcină reală a ecuației date.

2. Fiind dată mulțimea $\{a, b, c\}$, putem scrie:

$$a \in \{a, b, c\};\ d \notin \{a, b, c\};\ 5 \notin \{a, b, c,\}.$$

Dacă toate elementele unei mulțimi A aparțin și unei alte mulțimi B, se spune că mulțimea A este *inclusă* în mulțimea B sau că mulțimea A este *submulțime* (sau o parte)

Scanned with OKEN Scanner

a lui B, ceea ce se reprezintă prin scrierea: $A \subset B$. În acest caz, se mai spune că B *include* pe A, ceea ce se scrie sub forma: $B \supset A$. Această situație se poate reprezenta geometric, folosind diagramele lui Venn, ca în figura I.3.2. Se consideră, prin convenție, că mulțimea vidă este inclusă în orice mulțime. De asemenea, fiind dată o mulțime A ea poate fi considerată ca fiind inclusă în ea însăși: $A \subset A$. Aceste două submulțimi particulare, mulțimea vidă și mulțimea însăși, se numesc *submulțimi improprii* ale mulțimii date, orice altă submulțime fiind proprie.

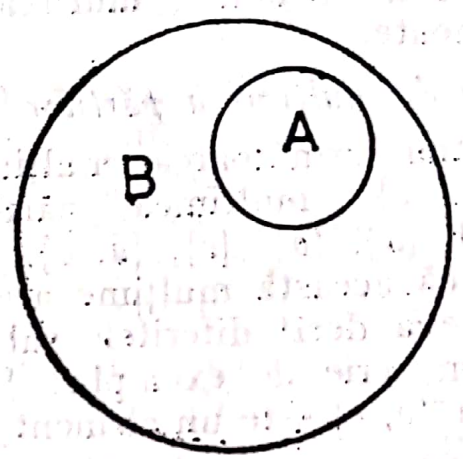


Fig. I.3.2

Faptul că o mulțime C nu este inclusă într-o altă mulțime D, se scrie simbolic sub forma: $C \not\subset D$, aceasta însemnînd că există elemente (cel puțin unul) ale mulțimii C, care nu aparțin și mulțimii D. Se poate observa că, dacă între două mulțimi, A și B, există o dublă relație de incluziune, de forma următoare: $A \subset B$ și $B \subset A$, aceste două mulțimi au aceleași elemente, adică sînt egale. Putem scrie această afirmație, folosind simbolurile logice din paragraful precedent, astfel: $(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$.

Accentuăm asupra faptului că incluziunea este o relație între două mulțimi, pe cînd apartenența este o relație între element și o mulțime. Așa stînd lucrurile, nu este corect să scriem, de pildă, $3 \subset \{2, 3, 4\}$ sau $\{3\} \in \{2, 3, 4\}$, căci relația corectă dintre elementul 3 și mulțimea $\{2, 3, 4\}$ este $3 \in \{2, 3, 4\}$ iar relația corectă dintre mulțimea $\{3\}$ și mulțimea $\{2, 3, 4\}$ este $\{3\} \subset \{2, 3, 4.\}$

Exemple de folosire a semnului de incluziune

1. Fiind date mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și $B = \{1, 3, 5\}$ avem evident $B \subset A$ mulțimea B fiind o submulțire proprie a mulțimii A. Pe de altă parte, putem scrie: $A \not\subset B$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Fie mulțimile:

$N = \{\text{numere naturale}\}$; $A = \{\text{numere pare}\}$; $B = \{\text{numere impare}\}$. Cu aceste mulțimi, putem scrie următoarele relații evidente: $A \subset N$, $B \subset B$, $A \not\subset B$.

Fiind dată o mulțime M, putem considera toate părțile ei drept elemente ale unei alte mulțimi, care se numește *mulțimea părților* lui M și care se notează de obicei cu $\mathcal{P}(M)$. Elementele acestei mulțimi, luate izolat, sînt submulțimi ale lui M, printre acestea fiind și mulțimea vidă, precum și mulțimea însăși. Se poate arăta că, dacă mulțimea M este finită, avînd n elemente, mulțimea părților sale, $\mathcal{P}(M)$, are 2^n elemente.

Exemplu de mulțime a părților

Considerînd următoarea mulțime cu trei elemente: $M = \{a, b, c\}$, mulțimea părților este următoarea: $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. Se observă că această mulțime are $2^3 = 8$ elemente, care nu sînt altceva decît diferitele submulțimi ale lui M. De aceea, putem scrie de exemplu: $\{b, c\} \in \mathcal{P}(M)$ deoarece submulțimea $\{b, c\}$ este un element al mulțimii $\mathcal{P}(M)$.

Raționamentele, ce se fac în vederea demonstrării unor relații de incluziune sau de egalitate între mulțimi, se pot scrie mai concentrat, din punct de vedere matematic, folosind două simboluri din logica matematică, cu care se notează așa numiții cuantificatori (sau cuantori). Să considerăm ca date o mulțime M, precum și o proprietate P, pe care o pot avea unele sau toate elementele acestei mulțimi (nu neapărat proprietatea de definiție a mulțimii M). Uneori, este necesar să arătăm că toate elementele mulțimii M au proprietatea P, ceea ce se scrie simbolic astfel: $(\forall)x$: x are proprietatea P, sau pentru a preciza că ne referim numai la elemente ale mulțimii M (ca să nu menționăm separat acest lucru);

$(\forall)x \in M$; x are proprietatea P.

Această notație se citește astfel: „oricare ar fi elementul x, al mulțimii M, x are proprietatea P". Expresia „oricare ar fi elementul x, al mulțimii M" se numește *cuantificatorul universal*. Așa cum se vede și din notația indicată mai sus, acest cuantificator se reprezintă prin „$(\forall)x \in M$ și precizează că ceea ce va urma este verificat de toate elementele mulțimii M.

Scanned with OKEN Scanner

Uneori, proprietatea P se referă la două sau mai multe elemente oarecare ale mulțimii M. Astfel, de exemplu notînd cu x și y două elemente ale mulțimii M, putem scrie: $(\forall)x, y \in M$: pentru x și y se verifică proprietatea P.

Exemple de folosire a cuantificatorului universal

1. Fiind dată mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, se verifică ușor că avem: $(\forall)\ x \in M;\ x =$ divide pe 120.

Se observă că, în acest caz, proprietatea folosită (x divide pe 120) este verificată și de alte numere, în afară de cele ce formează mulțimea M. În exemplul nostru interesează însă numai faptul că această proprietate este verificată de toate elementele mulțimii M.

2. Considerînd mulțimea numerelor reale, dintre care notăm unul oarecare prin x, putem scrie: $(\forall)x;\ x > 8 \Rightarrow$ $\Rightarrow x > 7$, ceea ce se citește: „oricare ar fi numărul real x, dacă $x > 8$, atunci $x > 7$. Este ușor de văzut că propoziția obținută prin aplicarea cuantificatorului universal, asupra implicației: $x > 8 \Rightarrow x > 7$, este o propoziție adevărată.

3. Considerînd două elemente variabile, x și y, ale mulțimii numerelor reale, putem scrie: $(\forall)x, y: (x + y)^2 = x^2 +$ $+ 2xy + y^2$, ceea ce se citește: „oricare ar fi numerele reale x și y, are loc egalitatea: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$".

Adesea, este necesar să arătăm că mulțimea M conține cel puțin un element, care are proprietatea P. Acest fapt se scrie simbolic astfel: $(\exists)x$: x are proprietatea P, respectiv prin precizarea mulțimii substituției: $(\exists)\ x \in M$: x are proprietatea P. Citim, această noțiune, astfel: „există cel puțin un element x, al mulțimii M, care are proprietatea P". Expresia există cel puțin un element x, al mulțimii M" se numește *cuantificatorul existențial*. Acest cuantificator se notează prin simbolul "$(\exists)\ x \in M$" și precizează că ceea ce va urma este verificat de cel puțin un element al mulțimii M. Uneori, proprietatea P se referă la două, sau mai multe elemente, oarecare, ale mulțimii M. De exemplu, dacă proprietatea P se referă la două elemente variabile, x și y, vom scrie: $(\exists)\ x, y \in M$; x și y verifică proprietatea P.

Exemple de folosire a cuantificatorului existențial

1. Notînd cu M mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, putem scrie: $(\exists)\ x \in M$; x este număr prim. Justețea acestei afirmații este ușor de verificat.

2. Notînd cu N mulțimea numerelor naturale, avem: $(\exists)\ x, y \in N$; $xy = 6$. Într-adevăr, relația $xy = 6$ este veri-

Scanned with OKEN Scanner

ficată, pentru x și y numere naturale, în oricare din următoarele cazuri: $x = 1$ și $y = 6$; $x = 2$ și $y = 3$; $x = 3$ și $y = 2$; $x = 6$ și $y = 1$.

Așa cum rezultă, din cele de mai sus, prin aplicarea unui cuantificator, asupra unei funcții propoziționale, se obține o propoziție. Mai mult, în folosirea practică a cuantificatorilor urmărim, în general, ca propoziția rezultată să fie adevărată. Dacă însă această propoziție nu este adevărată, vom folosi operația de negație, așa cum vom arăta în cele ce urmează.

Negația propoziției obținute prin aplicarea cuantificatorului universal, asupra unei funcții propoziționale, se notează astfel: $(\forall)x \in M$; x are proprietatea P, ceea ce se citește „nu pentru oricare x, aparținînd mulțimii M, x are proprietatea „P". Se poate observa că această propoziție este echivalentă cu următoarea: $(\exists)x \in M$; x nu are proprietatea P . Analog cu cele arătate mai sus, negația propoziției obținute prin aplicarea cuantificatorului existențial, asupra unei funcții propoziționale, se notează astfel: $(\exists)x \in M$; x are proprietatea P, ceea ce se citește „nu există nici un element al mulțimii M, care să aibă proprietatea „P". Observăm că această propoziție este echivalentă cu următoarea: $(\forall)x \in M$; x nu are proprietatea „P"

Din cele arătate, putem deduce o regulă, pentru a nega o propoziție obținută prin aplicarea unui cuantificator, asupra unei funcții propoziționale. Pentru aceasta, este nevoie să facem următoarele modificări:

— înlocuim cuantificatorul universal cu cel existențial, respectiv cuantificatorul existențial cu cel universal,

— negăm funcția propozițională asupra căreia este aplicat cuantificatorul.

Datorită acestei proprietăți ce exprimă interdependența celor doi cuantificatori, universal și existențial, spunem că acești cuantificatori sînt duali, iar că transformările prezentate mai sus sînt obținute prin dualitate.

Folosind cuantificatorii, introduși mai sus, putem scrie definiția relației de incluziune, între două mulțimi, sub o altă formă, ce oferă o metodă unitară de demonstrare a acestei relații, în diferite situații ce apar în rezolvarea problemelor. Astfel, pentru a arăta că $A \subset B$, trebuie să dovedim că: $(\forall)x \in A$, $x \in B$, iar pentru cazul contrar, cînd $A \not\subset B$, trebuie să avem: $(\exists)x \in A$; $x \notin B$. De asemenea, pentru a arăta că două mulțimi, A și B, sînt egale trebuie să dovedim

Scanned with OKEN Scanner

că $A \subset B$ și $B \subset C$, deci că: $(\forall)x \in A;\ x \in B$ și $(\forall)x \in B;\ x \in A$. În sfîrșit, pentru situația $A \neq B$, va trebui să arătăm că: $(\exists)x \in A;\ x \notin B$, sau $(\exists)x \in B;\ x \notin A$.

Exemplu de justificare a egalității, a două mulțimi.

Să notăm cu P mulțimea tuturor paralelogramelor din plan, iar E mulțimea patrulaterelor din același plan, în care diagonalele se taie în părți egale. Vrem să arătăm că: $P = E$.

Dacă considerăm un element oarecare x, din mulțimea P, adică un paralelogram, putem demonstra geometric că în el diagonalele se taie în părți egale, deci că el aparține și mulțimii E. Scriem aceasta astfel: $(\forall)\ x \in P;\ x \in E$, de unde rezultă că $P \subset E$.

Pe de altă parte, dacă considerăm un element oarecare x, din mulțimea E, adică un patrulater în care diagonalele se taie în părți egale, putem demonstra (geometric) că el este un paralelogram, deci că el aparține și mulțimii P. Scriem: $(\forall)y \in E;\ y \in P$, de unde rezultă că $B \subset P$.

Din cele două rezultate, se deduce că avem: $P = E$. Am lăsat pe seama cititorului demonstrațiile geometrice menționate.

Probleme date spre rezolvare

1. Fie mulțimea M, care are drept elemente termenii următorului șir de numere:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$$

Să se scrie mulțimea M, folosind notația cu ajutorul elementului generic.

2. Să se reprezinte, prin enumerarea elementelor, respectiv cu ajutorul elementului generic, următoarele mulțimi:

a) Mulțimea numerelor naturale, divizibile prin trei.

b) Mulțimea numerelor naturale, ce dau restul doi, la împărțirea prin cinci.

Se va folosi notația mulțimii numerelor naturale, prin simbolul N.

3. Considerînd ca variabilă, un element x oarecare, al mulțimii $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, să se reprezinte, prin enumerare, elementele următoarei mulțimi:

$$\{2x + 5 \mid x \in M\}.$$

Cum se numește mulțimea M, în acest caz?

Scanned with OKEN Scanner

4. Notînd cu N mulțimea numerelor naturale și cu R mulțimea numerelor reale, să se precizeze care dintre următoarele propoziții sînt adevărate:

a) $(\forall)x \in R$: $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$.

b) $(\forall)\ x \in N : \dfrac{x-1}{2} \in N$.

c) $(\exists)\ x \in N$: $3x^2 = 12$.

d) $(\exists)\ x \in R$; $x^2 + 1 = 0$

5. Să se reprezinte ca propoziții ce folosesc cuantificatorii $(\forall)$ și $(\exists)$, următoarele propoziții, ce folosesc negațiile acestor cuantificatori:

a) $(\forall)x \in R$: $x^2 - 1 \neq 0$.

b) $(\exists)x \in N$: $2x^2 - 5 = 0$.

c) $(\forall)x \in N : \dfrac{x+3}{5} \in N$.

6. Pentru fiecare două mulțimi, din cele ce urmează, să se precizeze relația corectă, în ceea ce privește incluziunea, alegînd de fiecare dată unul dintre simbolurile
$M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,\}$; M_2: $\{1, 5, 8\}$; $M_3 = \{1, 5, 9\}$
$M_4 = \{1, 8\}$.

7. Să se demonstreze că următoarele două mulțimi sînt egale:

M_1 = mulțimea numerelor naturale, care dau restul unu, la împărțirea prin trei.

M_2 = mulțimea numerelor naturale, care dau restul patru, la împărțirea prin șase.

I.4. Operații cu mulțimi

Fiind date anumite mulțimi, cu ajutorul lor se pot determina alte mulțimi, folosind unele operații, pe care le vom defini în paragraful de față. Vom considera că, atît mulțimile cu care se efectuează operațiile, cît și rezultatele acestor operații, fac parte (sînt submulțimi) dintr-o aceeași mulțime de referință (univers) pe care o numim *mulțime totală* și pe care o notăm simbolic prin T. Reprezentăm această mulțime, în sensul diagramelor lui Venn, ca un dreptunghi, în interiorul căruia se află toate celelalte mulțimi, cu care lucrăm. Un

Scanned with OKEN Scanner

exemplu, în acest sens, se găsește în figura I.4.1., unde este reprezentată o mulțime A, precum și două elemente, x și y (simbolic reprezentate prin două puncte) astfel încît: $x \in A$; $y \notin A$. După cum se vede în figură, toate acestea sînt încadrate în mulțimea totală T.

În funcție de mulțimile cu care lucrăm, mulțimea totală poate fi foarte generală (cuprinzînd elemente de natură diversă), sau dimpotrivă, foarte restrînsă, ea fiind luată, de fiecare dată, prin convenție. Dacă, de exemplu, toate calculele pe care le facem folosesc numai mulțimi ale căror elemente sînt numere naturale, putem considera drept mulțime totală mulțimea numerelor naturale, deși, evident, este posibil să folosim în acest scop orice altă mulțime care o include pe aceasta.

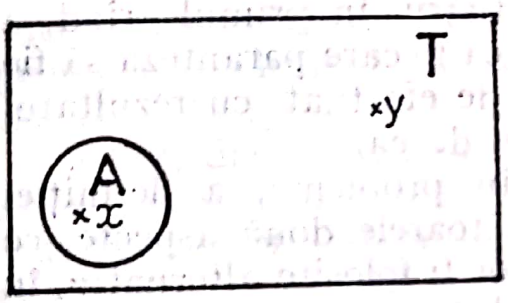


Fig. I.4.1

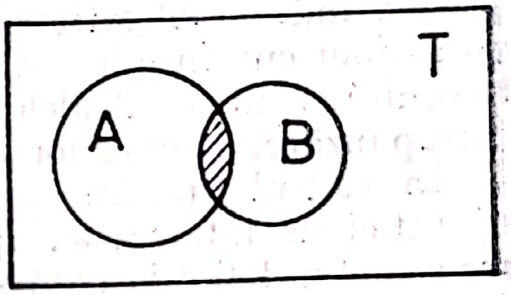


Fig. I.4.2.

Intersecția mulțimilor. Fiind date două mulțimi, A și B, se numește *intersecția* lor mulțimea formată cu elementele comune acestor mulțimi. Operația de intersecție se reprezintă prin simbolul $\cap$, astfel încît notăm rezultatul intersecției mulțimilor A și B prin $A \cap B$ și citim „mulțimea A intersectează cu mulțimea B" sau, mai scurt, „A intersectat cu B".

Conform definiției date, putem spune că un element oarecare x, aparține mulțimii $A \cap B$, dacă și numai dacă el aparține și mulțimii A și mulțimii B, ceea ce se exprimă prin următoarea echivalență logică:

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \quad \text{și} \quad x \in B,$$

sau, considerînd pe x ca un element generic, prin egalitatea:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}.$$

Intersecția mulțimilor A și B apare sub o formă deosebit de intuitivă, atunci cînd se folosesc diagramele lui Venn. Astfel, în figura I.4.2 această mulțime este reprezentată prin partea comună a reprezentărilor celor două mulțimi, haşurată în figură. Evident, în cazul cînd mulțimile A și B

Scanned with OKEN Scanner

nu au nici un element comun, intersecția lor este mulțimea vidă: $A \cap B = \emptyset$. În acest caz se spune că cele două mulțimi, A și B, sînt mulțimi *disjuncte*.

Operația de intersecție are următoarele proprietăți ce se pot demonstra ușor, fie folosind proprietățile operațiilor logice, antrenate de ea, fie, mai simplu, folosind diagramele lui Venn:

a) $A \cap B = B \cap A$ (comutativitatea intersecției).

b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (asociativitatea intersecției).

c) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

d) $A \cap B = A$, dacă $A \subset B$.

În ceea ce privește folosirea parantezelor (ce apar și în proprietatea de asociativitate, scrisă mai sus), reamintim că acestea indică obligativitatea efectuării, în primul rînd, a operațiilor cuprinse în ele, urmînd ca fiecare paranteză să fie înlocuită, pentru calculele rămase de efectuat, cu rezultatul corespunzător operațiilor conținute de ea.

În cadrul aplicării practice, în probleme, a definiției operației de intersecție, apar următoarele două aspecte, ce rezultă din definiția dată și care vor fi folosite alternativ, în funcție de problema pe care o rezolvăm:

(i) Pentru a arăta că un element x aparține intersecției mulțimilor A și B, trebuie să arătăm că el aparține atît mulțimii A cît și mulțimii B, adică folosim implicația următoare:

$$\left.\begin{array}{c} x \in A \\ \text{și} \\ x \in B \end{array}\right| \Rightarrow x \in A \cap B.$$

(ii) Atunci cînd știm că un element, x, aparține intersecției mulțimilor A și B, putem deduce că el aparține și mulțimii A și mulțimii B, adică folosim implicația:

$$x \in A \cap B \Rightarrow \left|\begin{array}{c} x \in A \\ \text{și} \\ x \in B. \end{array}\right.$$

Definiția intersecției a două mulțimi se poate extinde (conform proprietății de asociativitate), putînd considera intersecția mai multor mulțimi, aceasta fiind formată cu elementele comune tuturor mulțimilor ce se intersectează. De exemplu, în cazul a trei mulțimi A, B și C putem scrie:

$$A \cap B \cap C = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B \text{ și } x \in C\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Exemple de aplicare a operației de intersecție

1. Fie mulțimile finite: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ și $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Deoarece elementele 2, 4 și 6 sînt singurele elemente comune acestor mulțimi, scriem: $A \cap B = \{2, 4, 6\}$.

2. Să efectuăm intersecția următoarelor două mulțimi infinite în scrierea cărora s-a notat cu N mulțimea numerelor naturale: $A = \{x \mid x = 2n, n \in N\}$ și $B = \{x \mid x = 3n + 1, n \in N\}$.

Mai întîi vom scrie aceste două mulțimi, prin enumerare. În acest scop, înlocuim pe n din expresia elementului generic, succesiv cu 1, 2, 3, 4, 5, ... la fiecare mulțime în parte, obținînd astfel elementele acestor mulțimi. În acest fel găsim: $A = \{2, 4, 6, 8, 10...\}$; $B = \{4, 7, 10, 13, 16...\}$.

Prin observare directă, urmărind regulile după care se succed elementele acestor două mulțimi, se poate scrie forma generală a elementelor comune, astfel încît putem scrie: $A \cap B = \{x \mid x = 6n - 2, n \in N\}$.

Altfel, dacă vrem să obținem mulțimea $A \cap B$, fără să ne bazăm pe simple observații, ci pe baza unui raționament matematic, procedăm după cum urmează. Pentru ca un element $x \in B$ să fie și par ($x \in A$), el trebuie să se obțină din expresia $3n + 1$, $n \in N$, prin înlocuirea lui n cu un număr impar, adică de forma $2k - 1$, $k \in N$. Obținem astfel forma generală a numerelor ce fac parte din ambele mulțimi, A și B.:

$$3n + 1 = 3(2k - 1) + 1 = 6k - 2, \; k \in N.$$

În consecință, putem scrie: $A \cap B = \{x \mid x = 6k - 2, k \in N\}$, ceea ce reprezintă, evident, același rezultat ca mai sus.

Una dintre aplicațiile importante ale operației de intersecție este aceea de rezolvare a sistemelor de condiții, din algebră (sisteme de ecuații, de inecuații etc.). Un astfel de sistem este format dintr-un număr de condiții (funcții propoziționale), ce trebuie să se verifice a fi adevărate, pentru aceleași valori ale variabilelor (necunoscutelor). Sistemul apare sub următoarea formă generală, în care s-au notat cu $C_1, C_2 \ldots C_m$ cele M condiții ale sale: C_1 și C_2 și ... C_m

sau în notația uzuală a algebrei: $\begin{cases} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m. \end{cases}$

Scanned with OKEN Scanner

Cele m condiții pot fi funcții propoziționale de natură diversă (egalități, inegalități sau condiții speciale). Să notăm cu A_1, $A_2 \dots A_m$ mulțimile de valori, sau grupe de valori, ale variabilelor, ce verifică respectiv condițiile C_1, $C_2 \dots C_m$. Deoarece toate cele m condiții trebuie să fie verificate, în final, pentru aceleași valori ale variabilelor (acolada ține locul lui și, simbolul conjuncției logice), soluțiile sistemului se vor afla prin operația de intersecție a mulțimilor A_1, $A_2 \dots A_m$.

Exemple de rezolvare a unor sisteme de condiții

1. Luînd ca mulțime de referință (mulțime totală), mulțimea numerelor naturale, să rezolvăm următorul sistem:

$$\begin{cases} x < 12 \\ x \text{ se divide prin } 5. \end{cases}$$

Rezolvînd separat cele două condiții, obținem următoarele mulțimi de valori, ale variabilei x pentru care ele sînt respectiv verificate: $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$; $A_2 = \{5, 10, 15, 20\}$. Sistemul, celor două condiții, va fi satisfăcut deci pentru $x \in A_1 \cap A_2$ intersecția fiind, evident următoarea: $A_1 \cap A_2 = \{5, 10\}$. Soluțiile sistemului dat sînt deci următoarele: $x_1 = 5$; $x_2 = 10$.

2. Considerînd drept mulțime de referință mulțimea numerelor naturale, să rezolvăm sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4. \end{cases}$$

Avînd două variabile, x și y, să notăm un grup de două valori, prima pentru x și cea de a doua pentru y, prin simbolul (x, y). Iată, de exemplu, cîteva grupe de valori, de acest fel, precum și rezultatele înlocuirii lor, în cele două ecuații ale sistemului:

— grupa de valori (5,3) nu verifică nici una dintre cele două ecuații, deoarece prin substituția $x = 5$ și $y = 3$, cele două ecuații conduc la propozițiile false „$5 + 3 = 10$", respectiv „$5 - 3 = 4$"; grupa de valori (9,5) nu verifică prima ecuație, dar o verifică pe cea de a doua, deoarece substituția $x = 9$ și $y = 5$, în prima ecuație conduce la propoziția falsă „$9 + 5 = 10$" iar în cea de a doua ecuație conduce la propoziția adevărată „$9 - 5 = 4$".

Scanned with OKEN Scanner

Cu notația introdusă, cele două mulțimi de grupe de valori ce verifică prima, respectiv cea de a doua ecuație a sistemului, sînt următoarele:

$A_1 = \{(1,9), (2,8), (3,7), (4,6), (5,5), (6,4), (7,3), (8,2), (9,1)\}$

$A_2 = \{(5,1), (6,2), (7,3), (8,4), (9,5), (10,6)...\}$.

Mulțimea grupelor de valori, ce verifică și prima ecuație și cea de a doua ecuație a sistemului este dată de intersecția: $A_1 \cap A_2 = \{(7,3)\}$.

Ca urmare, singura soluție a sistemului dat este:

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}.$$

3. Considerînd drept mulțime de referință mulțimea numerelor reale, să rezolvăm sistemul de condiții ce urmează:

$$\begin{cases} x + y = 5 & (1) \\ x - y > 0 & (2) \\ x < 0 & (3) \end{cases}$$

Și aici avem două variabile, x și y, deci vom lucra cu grupe de cîte două valori, de forma (x, y), variabilele luînd însă valori reale oarecare. Să notăm, și aici, cele trei mulțimi de grupe de valori, ce verifică separat condițiile sistemului, respectiv prin A_1, A_2 și A_3. Datorită faptului că variabilele x și y iau valori reale, nu mai este posibilă reprezentarea acestor mulțimi prin enumerare. De aceea, le vom reprezenta cu ajutorul elementului generic. Este ușor de verificat că o astfel de reprezentare este cea care urmează:

$$A_1 = \{(x, 5 - x) \mid x \text{ oarecare}\}$$
$$A_2 = \{(x, y) \mid x > y\}$$
$$A_3 = \{(x, y) \mid x < 0, \ y \text{ oarecare}\}.$$

Mulțimea soluțiilor sistemului dat se va găsi prin intersecția celor trei mulțimi, pe care o efectuăm astfel:

— intersectăm, mai întîi, mulțimile A_1 și A_2;

— intersectăm mulțimea rezultată cu mulțimea A_3.

Pentru a intersecta mulțimile A_1 și A_2 raționăm după cum urmează: pentru ca un element al mulțimii A_1, de forma $(x, 5 - x)$ să aparțină și mulțimii A_2 trebuie să avem:

$x > 5 - x$ adică $x > \frac{5}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

De aceea, notînd cu M intersecția mulțimilor A_1 și A_2, avem: $M = A_1 \cap A_2 = \left\{ (x,\ 5 - x) \mid x > \frac{5}{2} \right\}$. Efectuînd acum și cea de a doua intersecție, dintre acest rezultat parțial și mulțimea A_3, obținem evident:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = (A_1 \cap A_2) \cap A_3 = M \cap A_3 = \emptyset.$$

În consecință, sistemul dat nu are nici o soluție.

Reuniunea mulțimilor. Fiind date două mulțimi, A și B, se numește *reuniunea* lor mulțimea formată și cu elementele lui A și cu elementele lui B luate cîte o singură dată. Se folosește ca simbol al operației de reuniune, simbolul $\cup$, astfel încît notăm rezultatul reuniunii mulțimilor A și B prin $A \cup B$, ceea ce citim „mulțimea A reunită cu mulțimea B, sau, mai scurt „A reunit cu B".

Definiția dată arată că un element oarecare x, aparține reuniunii mulțimilot A și B, dacă și numai dacă el aparține sau mulțimii A sau mulțimii B, sau ambelor mulțimi.

Această afirmație se exprimă prin echivalența logică:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ sau } x \in B.$$

Aceeași afirmație se mai exprimă și prin următoarea egalitate, care poate fi considerată ca definiție a operației de reuniune a două mulțimi: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$.

O reprezentare intuitivă, a reuniunii, a două mulțimi, poate fi obținută prin folosirea diagramelor lui Venn, ca în figurile I.4.3 a și I.4.3. b. Astfel, în figura I.4.3. a sînt considerate două mulțimi A și B, care au o parte comună ($A \cap B \neq \emptyset$), reuniunea lor fiind reprezentată de figura închisă hașurată, al cărei contur este îngroșat. În figura I.43. b sînt considerate două mulțimi disjuncte, A și B ($A \cap B = \emptyset$), caz în care reuniunea lor este reprezentată prin figura hașurată, formată din cele două cercuri, privire ca un tot.

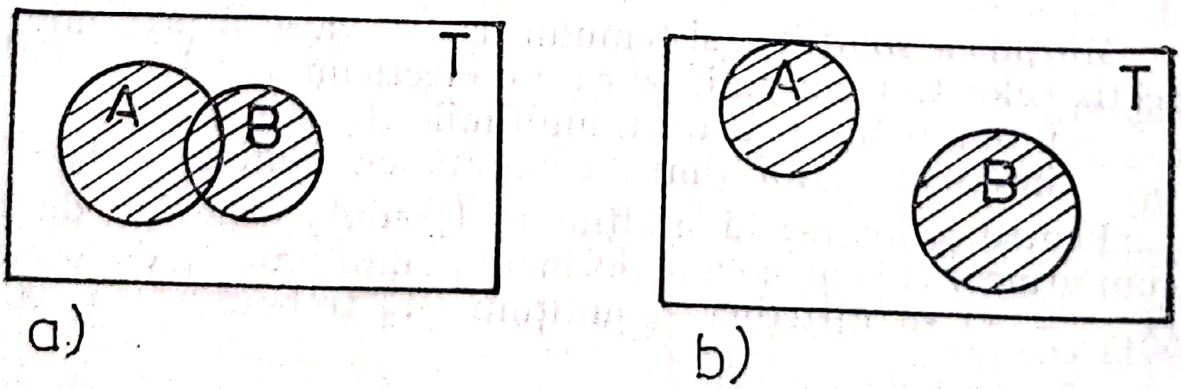


Fig. I.4.3

Scanned with OKEN Scanner

Operația de reuniune a mulțimilor are următoarele proprietăți, ce se justifică fie cu ajutorul proprietăților operațiilor logice corespunzătoare, fie cu ajutorul diagramelor lui Venn:

a) $A \cup B = B \cup A$ (comutativitatea reuniunii).

b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (asociativitatea reuniunii).

c) $A \cup \emptyset = A$.

d) $A \cup B = B$, dacă $A \subset B$.

Pentru folosirea practică, a definiției operației de reuniune, prezentăm următoarele două aspecte ce rezultă din definiția dată, ce vor fi folosite în funcție de problema pe care o rezolvăm.

(i) Pentru a arăta că un element, x, aparține reuniunii mulțimilor A și B, trebuie să arătăm că el aparține mulțimii A, sau mulțimii B, ceea ce înseamnă că folosim implicația următoare:

$$\left.\begin{array}{c} x \in A \\ \text{sau} \\ x \in B \end{array}\right| \Rightarrow x \in A \cup B.$$

Această implicație trebuie înțeleasă fie ca atare, fie sub oricare din următoarele forme:

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$$
$$x \in B \Rightarrow x \in A \cup B.$$

(ii) Atunci cînd știm că un element, x, aparține reuniunii mulțimilor A și B, putem deduce că el aparține mulțimii A, sau mulțimii B (cele două posibilități neexcluzîndu-se reciproc). În acest caz, folosim implicația următoare:

$$x \in A \cup B \Rightarrow \left|\begin{array}{c} x \in A \\ \text{sau} \\ x \in B. \end{array}\right.$$

Definiția reuniunii, a două mulțimi, poate fi extinsă, conform proprietății de asociativitate, la reuniunea mai multor mulțimi, aceasta fiind formată cu acele elemente ce aparțin la cel puțin una din mulțimile date. De exemplu, putem scrie:

$$A \cup B \cup C = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B \text{ sau } x \in C\}.$$

Exemple de aplicare a operației de reuniune

1. Fiind date mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și $B = \{2, 4, 6, 8\}$ reuniunea lor este dată de următoarea mulțime: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$.

Scanned with OKEN Scanner

După cum se vede, elementele 2 și 4 ,care aparțineau amblor mulțimi, au fost scrise în mulțimea $A \cup B$ cîte o singură dată.

2. Reuniunea mulțimilor infinite, ce urmează:
$A = \{\text{numere pare}\} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$
$B = \{\text{Numere impare}\} = \{1, 3, 4, 7, \ldots\}$ este dată de mulțimea numerelor naturale, ce se notează cu $N: A \cup B = N$.

O aplicație importantă a operației de reuniune a mulțimilor apare în cadrul rezolvării sistemelor de condiții, din algebră, anume atunci cînd un astfel de sistem se poate desface în mai multe sisteme, mai simple, fiecare dintre acestea constituind o posibilitate de verificare a sistemului dat. Dacă notăm cu $B_1, B_2, \ldots B_k$, mulțimile de soluții ale diferitelor posibilități, mulțimea soluțiilor sistemului dat va fi reuniunea acestora, adică va fi egală cu $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k$. Evident, cele expuse aici sînt cu atît mai mult adevărate pentru cazul unei singure condiții, ce se poate înlocui cu k condiții, mai simple, verificarea fiecăreia dintre acestea ducînd la verificarea condiției date.

Exemple de rezolvare a sistemelor de condiții, prin desfacere în mai multe posibilități

1. Considerînd ca mulțime de referință (mulțime totală), mulțimea N a numerelor naturale, să rezolvăm sistemul de condiții:

$$\begin{cases} (x + y - 6)(x + y - 8) = 0, & (1) \\ x \text{ se divide prin } y & (2). \end{cases}$$

Observăm că egalitatea (1) se poate verifica sau dacă $x + y - 7 = 0$, sau dacă $x + y - 8 = 0$, adică putem scrie: $(x + y - 6)(x + y - 8) = 0 \Rightarrow x + y - 6 = 0$ sau $x + y - 8 = 0$.

Sistemul dat se desface deci, în următoarele două sisteme mai simple, ce reprezintă două posibilități de verificare a lui

$$\text{I} \begin{cases} x + y - 6 = 0 & (1') \\ x \text{ se divide prin } y & (2) \end{cases} \qquad \text{II} \begin{cases} x + y - 8 = 0 & (1'') \\ x \text{ se divide prin } y & (2). \end{cases}$$

Să rezolvăm, mai întîi, posibilitatea I. Pentru aceasta, să notăm cu A_1 și A_2 mulțimile de grupe de valori, de forma (x, y), ce verifică respectiv condiția (1') și condiția (2). Mulțimea de referință fiind N, avem:

$A_1 = \{(1, 5), (2, 6), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$
$A_2 = \{(x, y) \mid x \text{ se divide prin } y\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Mulțimea de soluții, ce verifică posibilitatea I, pe care o notăm cu B_1, va fi obținută prin intersecția mulțimilor A_1 și A_2. Pentru a face această intersecție, se observă, că dintre cele cinci elemente ale mulțimii A_1, ultimile trei verifică condiția de definiție a mulțimii A_2, astfel încît avem:

$$B_1 = A_1 \cap A_2 = \{(3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$

Pentru rezolvarea posibilității II, notăm cu A_1' mulțimea de soluții a condiției (1″), aceasta urmînd a fi intersectată cu mulțimea A_2, deoarece cea de a doua condiție are aceeași formă ca și în posibilitatea I. Avem:

$$A_1' = \{(1, 5), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (7, 1)\},$$

astfel încît mulțimea B_2, de soluții a posibilității II, este următoarea: $B_2 = A_1' \cap A_2 = \{(4, 4), (6, 2), (7, 1)\}$.

Mulțimea de soluții a sistemului dat se obține prin aplicarea operației de reuniune asupra mulțimilor B_1 și B_2;

$$B_1 \cup B_2 = \{(2, 3), (4, 2), (5, 1), (4, 4), (6, 2), (7, 1)\}.$$

Sistemul propus are deci șase soluții și anume:

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5, \\ y = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6, \\ y = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7 \\ y = 1. \end{cases}$$

2. Mulțimea de referință fiind mulțimea numerelor reale, să rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2x + 3y = 10. \end{cases}$$

Deoarece prima ecuație a sistemului se verifică sau cînd $x - y = 0$, sau cînd $x + y = 0$, adică $x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x - y = 0$ sau $x + y = 0$, sistemul dat se desface în următoarele două posibilități:

$$\text{I} \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases} \qquad \text{II} \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3y = 10. \end{cases}$$

Rezolvînd aceste două sisteme, obținem respectiv, următoarele două mulțimi de soluții: $B_1 = \{(2, 2)\}$ $B_2 = \{(-10, 10)\}$ astfel încît sistemul dat va avea următoarele două soluții (elemente ale reuniunii mulțimilor B_1 și B_2):

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -10, \\ y = 10. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Complementara unei mulțimi. Fiind dată mulțimea totală T, pecum și o mulțime $A \subset T$, numim *complementara* mulțimii A (în raport cu T), o mulțime formată cu elementele lui T, care nu fac parte din A. Această mulțime se notează cu $C_T A$ sau, simplu, prin CA, dacă mulțimea totală este stabilită și nu există pericol de confuzie. Intuitiv, folosind diagramele lui Venn, complementara mulțimii A, în raport cu mulțimea totală T, apare ca în figura I.4.4 ea fiind reprezentată prin partea haşurată în această figură.

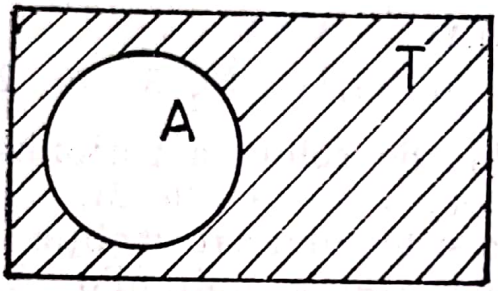


Fig. I.4.4.

Conform definiției date, notînd cu x un element oarecare al mulțimii totale T, acesta va aparține complementarei CA, dacă și numai dacă el nu aparține mulțimii A. Această afirmație se reprezintă simbolic prin echivalența logică: $x \in CA \Leftrightarrow x \notin A$, sau sub forma egalității care urmează, ce poate ține și ea loc de definiție a complementarei: $CA = \{x \mid x \notin A\}$. Evident, atunci cînd există pericol de confuzie, în notația complementarei trebuie menționată și mulțimea totală, iar în fiecare formă a definiției trebuie adăugat $x \in T$.

Se poate observa că, dacă considerăm drept mulțime dată pe CA, complementara acesteia este mulțimea A, ceea ce se exprimă prin propoziția „complementara complementarei unei mulțimi este mulțimea dată", sau simbolic: $C(CA) = A$. În acest sens, putem preciza deci că, în raport cu o mulțime totală T, părțile ei se grupează două cîte două, o grupă de acest fel fiind formată din două mulțimi complementare una alteia (A și CA). Două astel de mulțimi complementare verifică, evident următoarele relații $A \cap (CA) = \emptyset$, $A \cup (CA) = T$.

În aplicarea practică a definiției complementarei unei mulțimi, se folosește pe rînd, din echivalența menționată, cîte una din laturile ei, și anume, cîte una din următoarele implicații, în funcție de nevoie: a) $x \in CA \Rightarrow x \notin A$, b) $x \notin A \Rightarrow x \in CA$.

Scanned with OKEN Scanner

Exemple de aflare a complementarei unei mulțimi

1. Considerînd ca mulțime totală mulțimea: $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, următoarele două părți (submulțimi) ale ei reprezintă două mulțimi complementare una alteia $A = \{1, 2, 6, 8\}$ și $CA = \{3, 4, 5, 7, 9, 10\}$.

2. Dacă mulțimea totală este mulțimea numerelor naturale, mulțimea complementară a mulțimii: $A = \{$numere pare$\} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ este evident mulțimea $CA = \{$numere impare$\} = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$. Cu aceste două mulțimi se verifică imediat relațiile de legătură, ce au loc pentru oricare două mulțimi, compelmentare una alteia.

Diferența a două mulțimi. Dacă două mulțimi, A și B, se află în relația $B \subset A$, putem vorbi despre diferența mulțimilor A și B, notată cu $A - B$, aceasta fiind formată din toate elementele lui A, care nu aparțin lui B.

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}.$$

Folosind diagramele lui Venn, diferența mulțimilor A și B se reprezintă ca în figura I.4.5 unde ea apare sub forma suprafeței haşurate. Considerînd pe A ca pe o mulțime totală, sau luînd o altă mulțime T, drept mulțime totală, observăm că diferența mulțimilor A și B se poate scrie sub forma următoarei intersecții: $A - B = A \cap (CB)$.

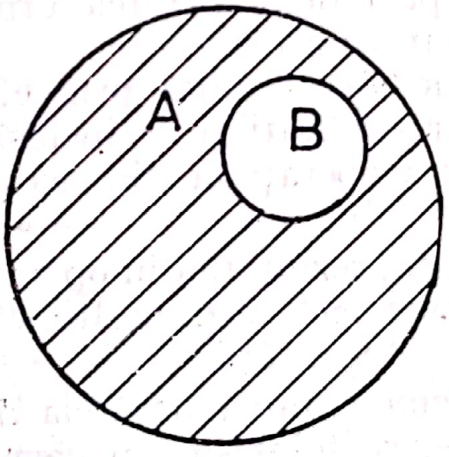


Fig. I.4.5.

Observație asupra operațiilor cu mulțimi. Din modul de prezentare a operațiilor cu mulțimi, din acest paragraf, rezultă că fiecare dintre acestea (în afară de diferență), corespunde la cîte o operație logică cu propoziții, corespondența fiind următoarea:

— operația de interesecție a mulțimilor corespunde conjuncției logice,

Scanned with OKEN Scanner

— operația de reuniune a mulțimilor corespunde disjuncției logice,

— operația de aflare a complementarei unei mulțimi corespunde negației logice.

Să explicăm, de exemplu, corespondența dintre operația de intersecție a mulțimilor și conjuncția logică. Pentru aceasta, să presupunem că este dată o mulțime totală T, un element variabil al acestei mulțimi fiind notat cu x. Considerînd două proprietăți oarecare, P_1 și P_2, propozițiile: p: „x are proprietatea P_1", q : „x are proprietatea P_2", definesc două mulțimi, A și B (părți ale lui T), ce pot fi scrise astfel: $A = \{x \mid x$ are proprietatea $P_1\}$, $B = \{x \mid x$ are proprietatea $P_2\}$. După definiția dată intersecției de mulțimi, intersecția următoare: $A \cap B = \{x/\ x \in A$ și $x \in B\} = \{x/\ x$ are proprietățile P_1 și $P_2\}$ este o mulțime definită prin conjuncția propozițiilor p și q, și anume: $p \wedge q$: „x are proprietățile P_1 și P_2". Analog se explică și celelalte corespondente, între operațiile cu mulțimi și operațiile logice cu propoziții.

Justificarea egalităților ce conțin operații cu mulțimi. Operațiile pe care le-am prezentat sînt legate prin anumite proprietăți, ce se exprimă de obicei prin egalități. Pentru înțelegerea unei astfel de egalități, putem folosi adesea diagramele lui Venn, care dau o interpetare geometrică, intuitivă, a egalităților cercetate. O justificare matematică se obține însă prin demonstrarea următoarelor două aspecte ale egalității în cauză:

— mulțimea, ce rezultă prin efectuarea operațiilor din prima parte a egalității, este inclusă în mulțimea ce rezultă prin efectuarea operațiilor din cea de a doua parte a egalității;

— mulțimea, rezultată din operațiile celei de a doua părți a egalității, este inclusă în mulțimea rezultată din operațiile primei părți a egalității.

Pentru demonstrarea fiecăreia dintre aceste două relații de incluziune, se folosește un element variabil al mulțimii pentru care urmează a se arăta că este inclusă în cealaltă, relațiile de apartenență ce rezultă din efectuarea operațiilor prezentîndu-se sub forma unei scheme, în lanț. În acest fel se obține o înșiruire de implicații de funcții propoziționale, asupra cărora acționează cuantificatorul universal. Această înșiruire de implicații trebuie să conducă, în final, la concluzia că elementul variabil ales aparține celei de a doua mulțimi, în care este inclusă cea de la care s-a pornit.

Scanned with OKEN Scanner

De cele mai multe ori, odată justificată una dintre cele două relații de incluziune, incluziunea inversă se poate urmări pe aceeași schemă, considerînd de fiecare dată implicația inversă, iar cuantificatorul universal fiind aplicat în raport cu mulțimea cu care s-a sfîrșit etapa precedentă.

Exemple de justificare a unei egalități ce conține operații cu mulțimi

Două dintre proprietățile importante, ale operațiilor cu mulțimi, sînt așa numitele relații ale lui *A* de Morgan și anume, $C(A \cup B) = (CA) \cap (CB)$; $C(A \cap B) = (CA) \cup (CB)$. Să luăm în discuție prima dintre aceste două relații, tot ceea ce vom spune referitor la ea, putîndu-se adapta și pentru cea de a doua. Mai întîi, observăm că această relație pare destul de ușor de înțeles intuitiv, dacă o citim sub forma următoare: „un element nu aparține reuniunii $A \cup B$, dacă și numai dacă el nu aparține nici mulțimii A și nici mulțimii B". Această afirmație se poate transpune și geometric, folosind diagramele lui Venn, ca în figura I.4.6.

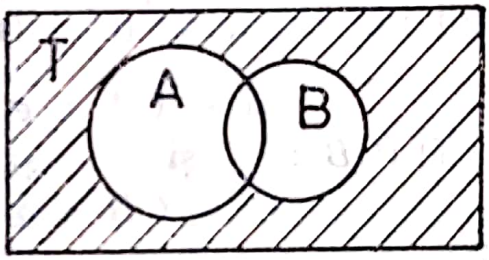


Fig. I.4.6.

În această figură, partea hașurată, a mulțimii totale T, poate fi interpretată în două moduri, și anume:

— tot ceea ce este în afara reuniunii $A \cup B$, adică $C(A \cup B)$,

— tot ceee ca este în afara lui A și în afara lui B, adică $(CA) \cap (CB)$.

În sfîrșit, să dăm o justificare riguroasă, a relației cercetate. Pentru aceasta, notăm mai întîi cu x, un element variabil al mulțimii $C(A \cup B)$. Cu această notație putem scrie următoarea înșiruire de implicații, asupra căreia se aplică cuantificatorul universal:

$$(\forall)x \in C(A \cup B) : x \notin A \cup B \overset{(1)}{\Rightarrow} \left| \begin{array}{ccc} x \notin A & \overset{(2)}{\Rightarrow} & x \in CA \\ \text{și} & & \text{și} \\ x \notin B & \overset{(3)}{\Rightarrow} & x \in CB \end{array} \right| \overset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} x \in (CA) \cap (CB).$$

Scanned with OKEN Scanner

Implicațiile de mai sus au fost numerotate numai în scopul înțelegerii explicațiilor ce urmează. În acest sens, precizăm că:

— implicația (1) rezultă din negarea proprietății de definiție a operației de reuniune a două mulțimi;

— implicațiile (2) și (3) rezultă din definiția complementarei unei mulțimi;

— implicația (3) rezultă din definiția operației de intersecție a două mulțimi.

Lanțul de implicații, scris mai sus, conduce la concluzia că are loc următoarea relație de incluziune:

$$C(A \cup B) \subset (CA) \cap (CB) \quad \text{(i)}$$

Implicația inversă, adică:

$$(CA) \cap (CB) \subset C(A \cup B) \quad \text{(ii)},$$

rezultă din citirea, în sens invers, a lanțului de implicații folosit mai sus și folosind drept mulțime de referință, pentru cuantificatorul universal, pe $(CA) \cap (CB)$:

$$(\forall)x \in (CA) \cap (CB): \left| \begin{array}{ccc} x \in CA & & x \notin A \\ \text{și} & & \text{și} \\ x \in CB & & x \notin B \end{array} \right| \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in$$

$$\in C(A \cup B).$$

Luînd în considerație cele două relații de incluziune, notate cu (i) și (ii), rezultă justețea egalității cercetate, adică:

$$C(A \cup B) = (CA) \cap (CB).$$

Produsul cartezian al mulțimilor. Fie date două mulțimi, A și B, din care considerăm două elemente, $a \in A$ și $b \in B$. Gruparea formată de aceste două elemente, ținînd seama de ordinea în care elementele se succed (mai întîi elementul din A, apoi elementul din B), se numește *pereche ordonată* de elemente. Această pereche ordonată se reprezintă simbolic prin (a, b), adică scriind elementele în ordinea impusă, cu virgulă între ele, întreaga grupare fiind închisă între paranteze. Cele două elemente ce formează perechea ordonată se numesc componentele perechii. Mai precis, a se numește *prima componentă*, iar b se numește cea de *a doua componentă*. Două perechi ordonate sînt considerate ca fiind egale, numai dacă primele lor componente sînt egale și componentele de pe

locurile secunde sînt de asemenea egale. Se numește *produs cartezian*, al mulțimilor A și B, mulțimea tuturor perechilor ordonate, astfel încît prima componentă este un element din A, iar cea de a doua componentă este un element din B. Notînd acest produs cartezian, simbolic, prin $A \times B$, avem deci: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$. Astfel, de exemplu, fiind date mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{a, b\}$, produsul lor cartezian este mulțimea: $A \times B = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$.

Observăm că produsul cartznian nu este comutativ, în produsul $B \times A$ intrînd perechi ordonate ale căror prime componente sînt elemente din B și ale căror componente secunde sînt elemente din A. Astfel, în exemplul considerat, avem: $B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$. În consecință, în general avem: $A \times B \neq B \times A$. O egalitate de tipul $A \times B = B \times A$, nu poate avea loc decît în cazul cînd $A = B$ cînd sîntem conduși la un produs cartezian de forme $A \times A$. În acest caz, produsul cartezian $A \times A$ se mai notează, pe scurt, prin simbolul A^2 (puterea a doua simbolică ce se citește „A doi" și nu „A pătrat").

În legătură cu produsul cartezian, corespunzător la două mulțimi, are loc următoarea proprietate, ușor de verificat: două mulțimile A și B sînt finite, A avînd m elemente, iar B avînd n elemente, produsul cartezian $A \times B$ este de asemenea o mulțime finită, avînd mn elemente.

Mai general, se poate defini produsul cartezian, corespunzător la trei sau mai multe mulțimi, după cum urmează: dacă se dau mulțimile A, B și C, se numește produsul lor cartezian, notat cu $A \times B \times C$, mulțimea tuturor tripletelor ordonate de forma (a, b, c), cu $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$. Analog, avînd mulțimile $A_1, A_2 \ldots, A_n$, produsul lor cartezian, notat cu $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$ este mulțimea tuturor grupelor ordonate, de forma (a_1, a_2, a_3, a_n), cu $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, $a_3 \in A_3 \ldots a_n \in A_n$. În cazul particular cînd $A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = A_n = A$, produsul cartezian al acestor mulțimi devine $A \times A \times A \times \ldots \times A$, ceea ce se scrie simbolic, pe scurt, sub forma A^n, și se citește „An". Reținem deci faptul că A^n este mulțimea grupelor de cîte n elemente, de forma $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, cu $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$.

Relații binare. Orice submulțime a produsului cartezian $A \times B$ se numește relație binară (sau corespondentă) între mulțimea A și B. O relație notată cu $\mathcal{R}$ se poate scrie sub

Scanned with OKEN Scanner

forma $\mathcal{R} = (A, B, G)$, cele trei elemente constitutive fiind următoarele:

a) Mulțimea A, numită mulțime de plecare a relației $\mathcal{R}$.

b) Mulțimea B, numită mulțime de sosire a relației $\mathcal{R}$.

c) Mulțimea $(G\ A\ B)$, numită graficul relației $\mathcal{R}$.

În cazul cînd o pereche de elemente (a, b), cu $a \in A$ și $b \in B$ face parte din G, spunem că aceste elemente sînt în relația $\mathcal{R}$ (în corespondența $\mathcal{R}$) și scriem: $a\ \mathcal{R} b$. În situațiile practice, cunoscute și folosite în diverse domenii ale matematicii, simbolul $\mathcal{R}$, ce reprezintă relația, este înlocuit cu diferite alte simboluri, în funcție de natura problemei. Astfel, de exemplu, în cadrul relației de egalitate este folosit simbolul $=$, în cadrul relației de paralelism este folosit simbolul $\parallel$ ș.a.m.d.

În multe aplicații ale relațiilor binare, se consideră relații de forme (A, A, G), adică relații între o mulțime A și ea însăși. Astfel de relații sînt submulțimi ale produsului cartezian $A \times A = A^2$.

Exemple de relații binare

1. Luînd ca mulțime de referință mulțimea numerelor reale, notată cu R, relația de egalitate a acestor numere are următorul grafic: $G = \{(x, y) \in R^2 \mid x = y\}$. Aceasta înseamnă că, într-un sistem de axe rectangulare, în care fiecărei perechi ordonate (x, y), îi corespunde un punct, mulțimea G este formată din toate punctele ce se găsesc pe bisectoarea întîia a sistemului de axe.

2. Considerînd drept mulțime totală mulțimea numerelor naturale, notată cu N, relația de divizibilitate are următorul grafic: $G = \{(x, y) \in N^2 / x$ se divide prin $y\}$.

Probleme date spre rezolvare

1. Să se rezolve următoarele sisteme de condiții, pentru care se consideră ca mulțime de referință mulțimea numerelor naturale:

a) $\begin{cases} a < 20, \\ x \text{ este prim cu } 3, \\ x \text{ este divizibil prin } 4. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x + y = 13, \\ y \text{ este număr prim.} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 15 \\ x \text{ se divide prin } y. \end{cases}$

Scanned with OKEN Scanner

2. Considerînd drept mulțime de referință mulțimea numerelor reale, să se rezolve următoarele sisteme de condiții:

a) $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y = 8 \\ 2x + y \geqslant 2 \\ x \leqslant 2. \end{cases}$

3. Considerînd drept mulțime de referință mulțimea numerelor naturale, să se determine mulțimea grupelor de valori, de forma (x, y), ce verifică următorul sistem de condiții:

$$\begin{cases} (2x + 2x - 25)\ (3x + 4x - 37) = 0, \\ x + y = 11. \end{cases}$$

4. Să se demonstreze următoarea relație de incluziune, A și B fiind două mulțimi oarecare:

$$(A \cup B) \cap (CB) \subset A.$$

Se vor folosi implicațiile rezultate din definițiile operațiilor cu mulțimi. Ce interpretare intuitivă are relația, interpretare ce rezultă din folosirea diagramelor lui Venn?

5. Se numește sumă disjunctivă, sau diferență simetrică, a mulțimilor A și B, mulțimea ale cărei elemente aparțin fie lui A (neaparținînd și lui B), fie lui B (neaparținînd și lui A). Repartizînd această operație prin simbolul $A \oplus B$, să se arate că: $A \oplus B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = (A \cup B) \cap [C(A \cap B)]$.

6. Fie date mulțimile M, P, Q și R din fig. I.IV.7. Să se exprime în funcție de ele, cu ajutorul simbolurilor de intersecție, reuniune și complementare, mulțimile haşurate în figura I.4.7.

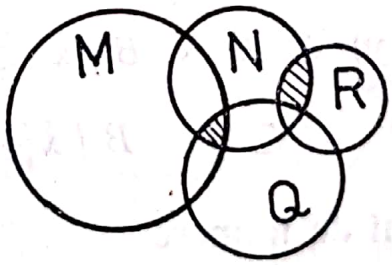


Fig. I.4.7.

7. Să se precizeze în ce condiții are loc egalitatea:

$$A \times B = \emptyset.$$

8. Fie mulțimile:
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Să se calculeze mulțimea: $(A \cap B) \times (CA)$, considerînd pe T ca mulțime totală.

9. Să se justifice următoarele proprietăți ale operațiilor cu mulțimi:

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
c) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
d) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Cercetînd forma acestor proprietăți, să se precizeze denumirea științifică a fiecăruia dintre ele.

Exemplu: prima proprietate indică distributivitatea operației de intersecție, față de operația de reuniune.

10. Fie mulțimile:

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}, \qquad B = \{3, 6, 9, 12\}.$$

Fie, de asemenea, o relație $\mathcal{R}$, al cărei grafic este următorul:

$$G = \{(x, y) \in A \times B \mid x \text{ divide pe } y\}.$$

Să se scrie mulțimea G, prin enumerarea elementelor ei.

11. Să considerăm următoarele două submulțimi finite, ale mulțimii numerelor naturale: $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Adunarea și scăderea numerelor fiind cele obișnuite din mulțimea numerelor naturale, să se scrie toate elementele relațiilor definite prin următoarele grafice: a) $G_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y = 4\}$; b) $G_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid x - y = 2\}$; c) $G_3 = \{(x, y) \in A \times B \mid x = 2\}$.

12. Fie mulțimile: $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$. Să se scrie toate elementele relațiilor definite prin graficele:

a) $G_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid x < y\}$; b) $G_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid x > y\}$;

c) $G_3 = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y < 5 \text{ și } x - y \leqslant 3\}$.

1.5. Mulțimi de numere

Noțiunea de număr s-a format printr-o abstractizare accentuată a fenomenelor realității și s-a lărgit treptat, datorită necesităților obiective de a putea trece anumite obstacole în aplicațiile ei. Astfel, cea care se desprinde mai ușor de pe suportul ei material este noțiunea de *număr natural*. Vom nota mulțimea numerelor naturale cu N. Dintre

Scanned with OKEN Scanner

operațiile care se pot face în această mulțime de numere, două au totdeauna sens, căci rezultatele lor sînt mereu tot numere naturale: adunarea și înmulțirea. Operația inversă adunării — scăderea — conduce la un număr natural numai dacă descăzutul este mai mare decît scăzătorul: pentru $a, b \in N$, $a - b = c \in N$ dacă $a > b$.

Pentru a putea efectua scăderea și în cazul cînd $a = b$, se introduce simbolul 0 (zero) care are următoarele proprietăți:

$$a + 0 = 0 + a = a, \quad a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

De asemenea, pentru a putea efectua scăderea cînd $a > b$, se introduc numerele $-1, -2, -3, \ldots -n, \ldots$, numite numere întregi negative. Acestea, împreună cu numerele naturale și cu numărul zero, formează *numerele întregi*. Să notăm mulțimea numerelor întregi cu Z. Deoarece în mulțimea numerelor întregi se pot face întotdeauna operațiile de adunare și înmulțire, precum și operația inversă adunării — scăderea — toate aceste operații, avînd proprietățile cunoscute, în algebra modernă se zice că *numerele întregi formează un inel*. Dacă vom reprezenta toate numerele întregi pe o axă, vom observa că ele reprezintă puncte izolate, la distanțe egale cu unitatea, unele de altele (vezi figura I.5.1).

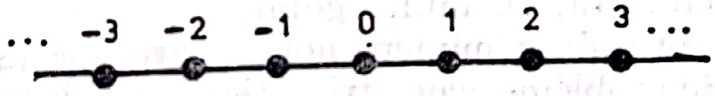


Fig. I.5.1

Dacă lucrăm numai cu numere întregi, împărțirea nu este totdeauna posibilă, ci numai în cazul cînd deîmpărțitul este divizibil cu împărțitorul. Pentru a putea efectua împărțirea și în cazul contrar, introducem numerele fracționare, care împreună cu cele întregi formează *numerele raționale*. Să notăm mulțimea acestor numere cu Q. Deoarece cu numerele raționale se pot efectua totdeauna operațiile de adunare și înmulțire, precum și operațiile lor inverse, scăderea și împărțirea (cu excepția împărțirii prin zero), toate aceste operații avînd proprietățile cunoscute, în albgera modernă se spune că *numerele raționale formeaza un corp*.

Pentru că și numerelor întregi li se poate da numitorul unu, numerele raționale se pot defini ca numerele de forma $\frac{m}{n}$ (m și n sînt numere întregi). Din aritmetică se știe însă că, puse sub formă de numere zecimale, numerele raționale

sînt, fie cu un număr finit de zecimale, fie cu un număr infinit de zecimale, însă periodice (simple sau mixte), ceea ce constituie un alt mod de definire a numerelor raționale.

Considerînd două numere raționale oarecare, a și b, între ele există totdeauna una și numai una din următoarele trei posibilități: $a < b$, $a = b$, $a > b$, lucru care se exprimă de obicei prin propoziția: *mulțimea numerelor raționale este total ordonată*. Dacă vom reprezenta toate numerele raționale pe o axă, vom observa că ele reprezintă puncte foarte dese, cît vrem noi de apropiate.

Într-adevăr, oricît de apropiate ar fi două numere raționale, a și b, între ele mai există o infinitate de numere raționale, deoarece între ele se poate introduce mai întîi numărul $\frac{a+b}{2}$ (și el rațional), între acesta și fiecare dintre numerele date încă cîte un număr rațional (mediile aritmetice respective) ș.a.m.d. Din această cauză se spune că *mulțimea numerelor raționale este densă*.

Se pune problema: numerele raționale umplu toată axa, ori mai există puncte ale axei care nu corespund nici unui număr rațional? Experiența a arătat că numerele raționale nu umplu toată axa, ci aceasta apare, după reprezentare, ca o dreaptă ciuruită, cu multe goluri.

Trebuie introduse numere noi, a căror necesitate a fost dictată fie de probleme geometrice, fie de probleme aritmetice. Astfel, dacă vom construi un pătrat cu latura de o unitate, lungimea diagonalei sale se va exprima printr-un număr care nu a fost reprezentat pe axă (în geometrie s-a demonstrat că diagonala pătratului nu este comensurabilă cu latura sa). Pe de altă parte, operația de extragere a rădăcinii, de un ordin oarecare, dintr-un număr rațional, nu duce întotdeauna la un număr rațional. Datorită acestui fapt, a fost necesară introducerea *numerelor iraționale*, care se pot defini ca numere ce nu pot fi puse sub forma $\frac{m}{n}$, cu $m, n \in Z$. Astfel, de exemplu, dacă vom căuta un număr pozitiv, care ridicat la pătrat să dea 2, vom observa că el nu poate avea forma $\frac{m}{n}$, deci el nu există, dacă lucrăm numai cu numere raționale.

Într-adevăr, să presupunem prin absurd că putem avea: $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, unde m și n sînt numere naturale, prime între ele,

adică fracția $\frac{m}{n}$ nu se mai poate simplifica. Această egalitate se poate scrie: $m^2 = 2n^2$ și nu poate avea loc decît dacă $m = 2p$, adică dacă m este par. Înlocuind, găsim $4p^2 = 2n^2$, sau $2p^2 = n^2$, egalitate care spune că și n este par, deci fracția $\frac{m}{n}$ se poate simplifica cu 2, fapt ce contrazice presupunerea inițială. Vom spune că numărul căutat există, dar nu se poate pune sub forma $\frac{m}{n}$, cu $m, n \in N$, adică nu este rațional; îl vom numi irațional și îl vom nota cu $\sqrt{2}$. Astfel de numere sînt multe și se pot găsi nu numai ca rezultate al operației de extragere a rădăcinii. Astfel, numărul π, raportul dintre lungimea cercului și diametrul său, este și el un număr irațional. Puse sub formă de numere zecimale, numerele iraționale apar cu un număr infinit de zecimale și neperiodice. Reprezentate pe axă, numerele iraționale umplu toate golurile rămase de la reprezentarea numerelor raționale, formînd ceea ce se numește un *continuum matematic*. Astfel, punctele axei reprezintă fie numere raționale, fie numere iraționale, din care cauză aceste numere la un loc se numesc *numere reale*.

Să notăm mulțimea numerelor reale prin R. Și cu aceste numere sînt posibile întotdeauna adunarea și înmulțirea, precum și operațiile lor inverse, scăderea și împărțirea (excepție făcînd împărțirea prin zero), deci *și numerele reale formează un corp*.

Intervale pe axa reală. Una dintre proprietățile importante, ale mulțimii numerelor reale, este aceea că această mulțime este total ordonată, ceea ce înseamnă că, pentru orice două numere reale, x și y, are loc una și numai una dintre următoarele trei situații: $x < y$, $x = y$, sau $x > y$. Această proprietate este folosită la definirea unor submulțimi ale mulțimii numerelor reale, ce apar adesea în calculele sau rezultatele problemelor de algebră. În plus, corespondența dintre numerele reale și punctele unei axe (numită *axă reală*, datorită acestei corespondențe), face ca submulțimile menționate să aibă o reprezentare geometrică, intuitivă.

Mulțimea tuturor numerelor reale (putem spune tot așa de bine a punctelor axei), cuprinse între două numere, a și b, fără a socoti și aceste valori ($a < x < b$), se numește *interval deschis* și se notează (a, b). În cazul în care includem și

Scanned with OKEN Scanner

capetele a și b ($a \leqslant x \leqslant b$), mulțimea se numește *interval închis sau segment* și se notează $[a, b]$.

Putem avea cazul unui interval *închis la stînga și deschis la dreapta* ($a \leqslant x < b$), care se notează $[a, b)$, ori a unui interval *deschis la stînga și închis la dreapta* ($a < x \leqslant b$), care se notează $(a, b]$.

Cele patru tipuri de intervale, definite mai sus, se reprezintă geometric, pe axa reală, ca în figura I.5.2. Toate aceste intervale se numesc *intervale mărginite*, toate punctele lor fiind la distanțe finite față de originea axei. Există însă și *intervale nemărginite* care se definesc astfel, a fiind un număr real dat:

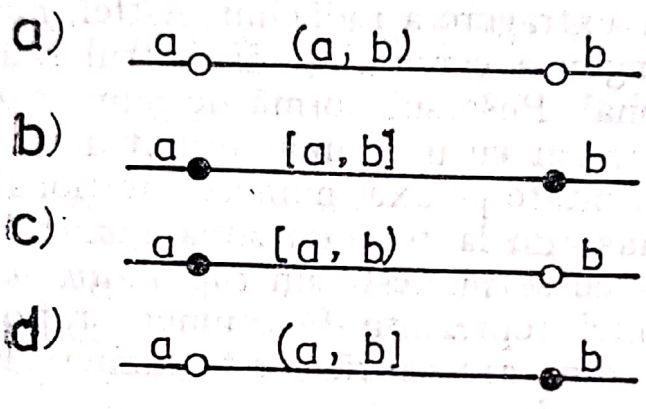


Fig. I.5.2

a) *semidreapta deschisă, nemărginită la dreapta*, este totalitatea numerelor (sau punctelor) $x > a$ și se notează $(a, +\infty)$;

b) *semidreapta închisă, nemărginită la dreapta* — $(x \geqslant a)$ se notează $[a, +\infty)$;

c) *semidreapta deschisa, nemărginită la stînga* — $(x < a)$ se notează $(-\infty, a)$;

d) *semidreapta închisa, nemărginită la stînga* — $(x \leqslant a)$ se notează $(-\infty, a]$;

e) mulțimea numerelor reale R, reprezentînd toată axa, formează un interval nemărginit în ambele părți și se mai notează $(-\infty, +\infty)$.

Toate aceste intervale nemărginite se reprezintă geometric pe axa reală, ca în figura I.5.3.

Efectuarea operațiilor de intersecție și reuniune a intervalelor. După cum am arătat, datorită corespondenței dintre numerele reale și punctele unei axe, submulțimile lui R, de forma intervalelor specifice mai sus, au și o altă repre-

Scanned with OKEN Scanner

zentare geometrică, în afară de diagramele lui Venn și anume cea indicată în figurile I.5.2 și I.5.3. Această reprezentare este utilă îndeosbi atunci cînd trebuie să efectuăm operații de intersecție și reuniune cu astfel de intervale. În cele ce urmează, propunem o metodă simplă, prin care efectuarea acestor operații este ușor de urmărit.

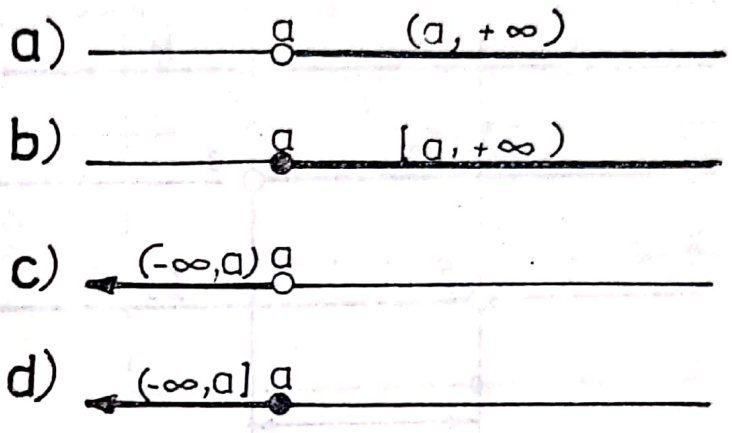


Fig. I.5.3

Avînd de efectuat o intersecție de k intervale, trebuie mai întîi k axe paralele, apropiate între ele. Vom presupune aceeași unitate de măsură, pe fiecare dintre cele k axe considerate. De asemenea, originile axelor vor fi presupuse pe o perpendiculară comună pe aceste axe. Reprezentăm apoi, pe fiecare axă, cîte un interval, prin îngroșarea acelei părți a axei, ce corespunde punctelor intervalului în cauză, scoțînd în evidență, prin cerculețe pline sau goale, cînd capetele intervalului aparțin sau nu acelui interval. Intersecția tuturor celor k intervale va fi dată de partea comună, îngroșată pe toate cele k axe.

În cazul cînd avem de efectuat o reuniune de k intervale, procedăm în mod asemănător, însă rezultatul operației va fi dat de acele părți ale axei, pentru care cel puțin pe una dintre cele k axe există o porțiune îngroșată. Evident, atunci cînd o parte a axei este îngroșată pe mai multe dintre cele k axe paralele, ea va fi considerată, în rezultatul operației de reuniune, o singură dată.

Exemple de efectuare a operațiilor cu intervale

1. Fie următoarele intervale: $I_1 = [1, \infty)$; $I_2 = [0, 3)$; $I_3 = [2, \infty)$. Să efectuăm intersecția: $I = I_1 \cap I_2 \cap I_3$. Pentru aceasta folosim trei axe paralele, pe care repre-

zentăm cîte unul dintre cele trei intervale, date, ca în figura I.5.4. În figură este scoasă în evidență și partea comună, îngroșată pe toate cele trei axe, aceasta reprezentînd rezultatul operației de intersecție. Deci: $I = [2, 3)$, ținînd seama de faptul că, în dreptul punctului $x = 3$ avem un cerculeț alb pe cea de a doua axă.

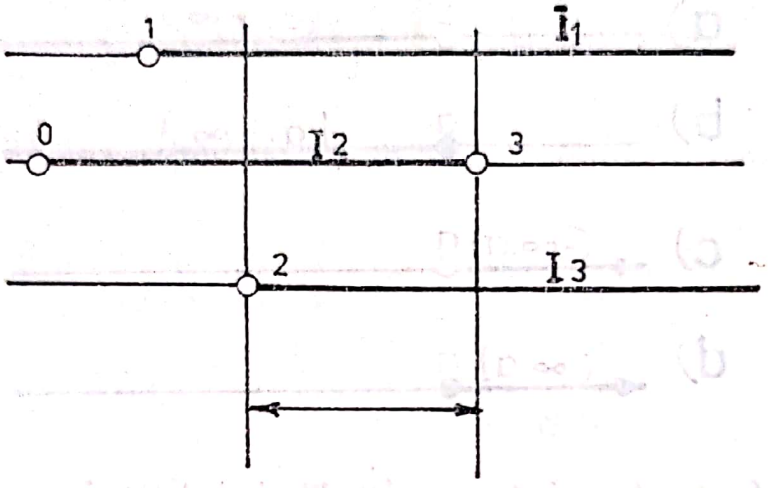


Fig. I.5.4

2. Să efectuăm reuniunea următoarelor patru intervale: $I_1 = (\infty, 0)$; $I_2 = [-1, 1]$; $I_3 = (1, 2]$; $I_4 = [3, 4)$. În figura I.5.5 aceste intervale sînt reprezentate pe patru axe paralele, din figură rezultînd că reuniunea lor poate fi scrisă mai concentrat, astfel: $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 = (-\infty, 2] \cup [3, 4)$.

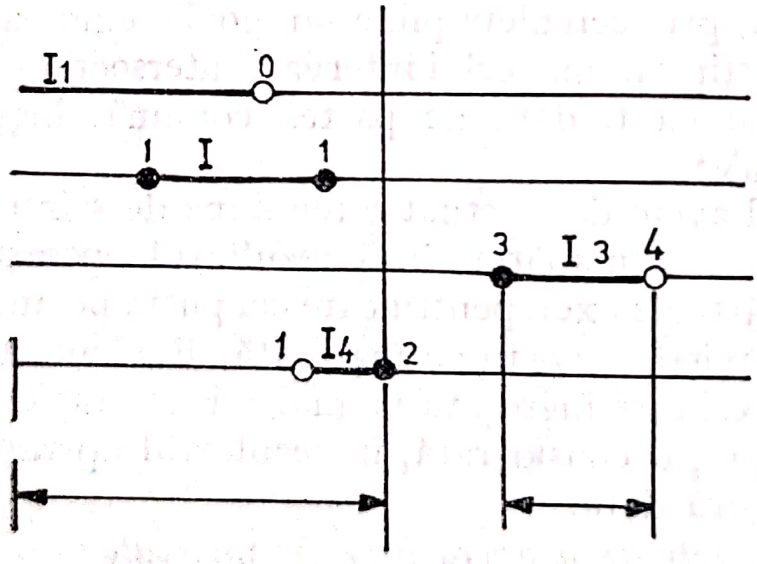


Fig. I.5.5

Deoarece cele două intervale, ce se reunesc în acest rezultat, sînt disjuncte, aceasta este cea mai concentrată formă a rezultatului.

Scanned with OKEN Scanner

3. Fie intervalele: $A = (-3, 2]$; $B = (0, 4]$; $C = [6, 8]$; $D = (1, 7)$. Să efectuăm următoarele operații cu aceste intervale: $I = (A \cup B \cup C) \cap D$. În figura I.5.6 este efectuată reuniunea mulțimilor A, B și C, aceasta conducînd la următorul rezultat parțial al operațiilor din paranteză:

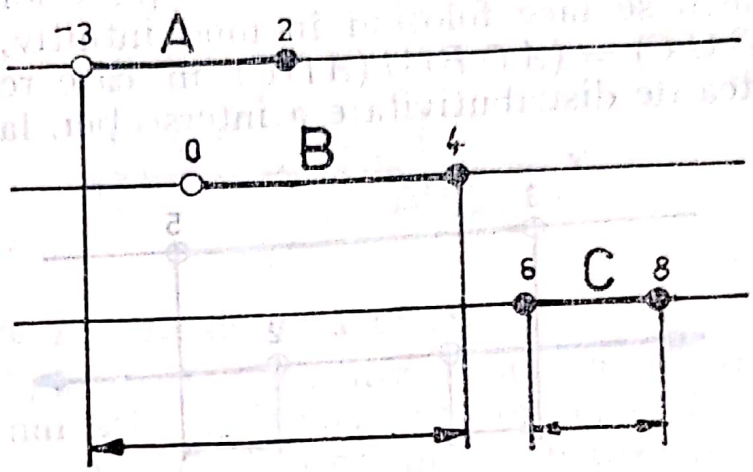


Fig. I.5.6

$M = (-3, 4] \cup [6, 8]$. Cunoscînd acest rezultat parțial, se poate efectua apoi intersecția $M \cap D$, care este realizată în figura I.5.7. Conform acestei figuri, rezultatul final al operațiilor cerute, este următorul: $I = (1, 4] \cup [6, 7)$.

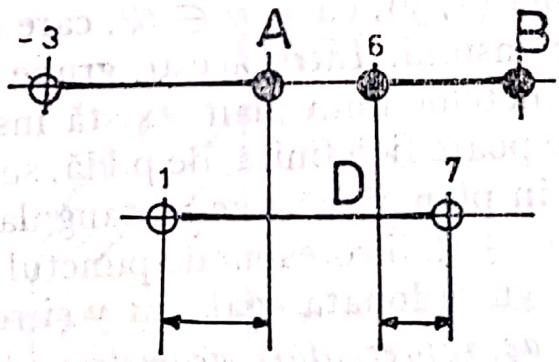


Fig. I.57.

4. Să se determine mulțimea de numere reale, care verifică următorul sistem de inecuații:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 15 < 0 \\ x^2 - x - 2 \leqslant 0. \end{cases}$$

Rezolvînd, pe rînd, cele două inecuații, obținem pentru prima soluție $x \in [-3, 5]$, iar pentru cea de a doua, soluția $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$. Intersectînd cele două mulțimi de soluții, ca în figura I.5.8, obținem soluția sistemului, sub forma: $x \in [-3, -1) \cup (2, 5]$.

Scanned with OKEN Scanner

În ceea ce privește judecata simplă, ce se face privind figura I.5.8, pentru a efectua operația de intersecție, precizăm următoarele. Notînd $A = (-3, 5)$, $B = (-\infty, -1)$, $C = (2, +\infty)$, prima inecuație este verificată de punctele intervalului A, iar cea de a doua inecuație este verificată de punctele reuniunii $B \cup C$. Intersecția celor două mulțimi de soluții se face folosind în mod intuitiv, formula: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ în care recunoaștem proprietatea de distributivitate a intersecției, față de reuniune.

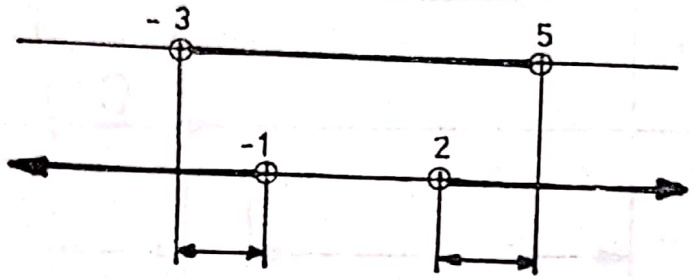


Fig. I.5.8

Spațiul cu două dimensiuni. Produsul cartezian al mulțimii numerelor reale, prin ea însăși, notat cu $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$, sau mai scurt, cu $\mathcal{R}^2$, se numește *spațiul cu două dimensiuni*, datorită interpretării pe care o prezentăm în continuare. După cum am arătat, acest produs este mulțimea tuturor grupelor ordonate, de forma (x, y), cu $x, y \in \mathcal{R}$, care se numesc și vectori cu două dimensiuni. Între aceste grupe de numere reale și mulțimea punctelor unui plan există însă o corespondență biunivocă, ce poate fi definită, de pildă, sub forma următoare: considerînd, în plan, două axe rectangulare, Ox și Oy, grupei (x, y), cu $x, y \in R$, îi corespunde punctul din plan, cu abscisa egală cu x și cu ordonata egală cu y și reciproc.

Exemple de reprezentări geometrice ale unor submulțimi ale spațiului cu două dimensiuni

1. Fie submulțimea $D \subset R^2$. definită astfel:

$$D = \{(x, y) \in R^2 / x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}.$$

Această submulțime are drept reprezentare geometrică în planul xOy, mulțimea tuturor punctelor din pătratul $OABC$, cu latura egală cu o unitate, ce se află în figura I.5.9. Deoarece intervalele de variație ale lui x și y sînt închise, în mulțimea descrisă vor intra și punctele ce se află chiar pe laturile pătratului, fapt datorită cărui spunem că mulțimea D este o *mulțime închisă.*

Scanned with OKEN Scanner

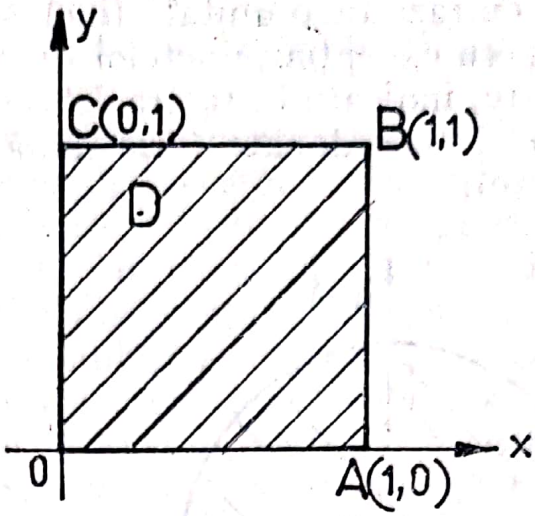


Fig. I.5.9

2. Submulțimea $P \subset R^2$ definită prin: $P = \{(x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 < 9\}$, are drept reprezentare geometrică, în planul xOy, mulțimea tuturor punctelor din interiorul unui cerc, cu centrul în origine și cu raza de trei unități, ca în figura I.5.10. În această mulțime nu sînt incluse și punctele de pe circumferință, deoarece proprietatea de definiție a mulțimii P este dată printr-o inegalitate strictă (nu permite să avem și $x^2 + y^2 = 9$). Datorită acestei caracteristici, spunem că mulțimea P este o *mulțime deschisă*.

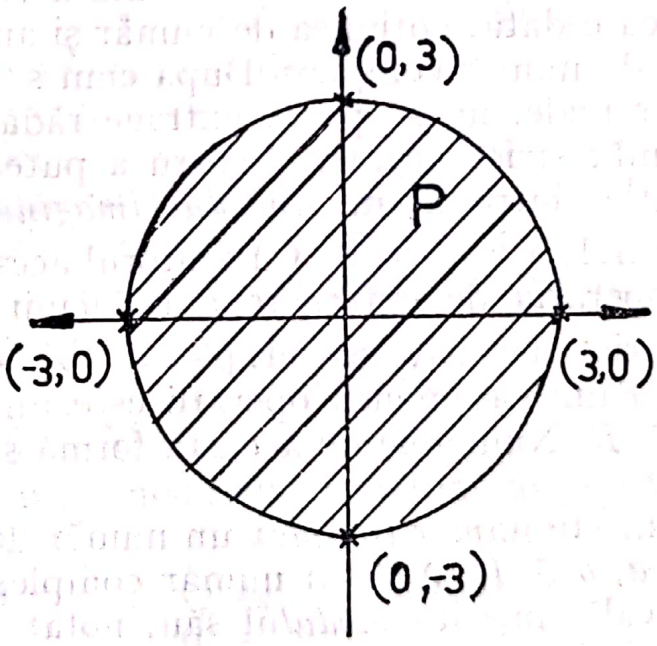


Fig. I.5.10

3. Să considerăm submulțimea $M \subset R^2$, definită astfel: $M = \{(x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leqslant 1 \text{ și } x^2 - y^2 = 0\}$. Această submulțime este reprezentată geometric, în planul xOy, prin mulțimea punctelor din interiorul unui cerc, cu centrul

Scanned with OKEN Scanner

în origine și cu raza de o unitate (inclusiv punctele de pe circumferință), cu excepția punctelor de pe cele două diametre perpendiculare, indicate în figura I.5.11 care fac unghiuri de 45° cu axele de coordonate (cele două bisectoare ale sistemului de axe).

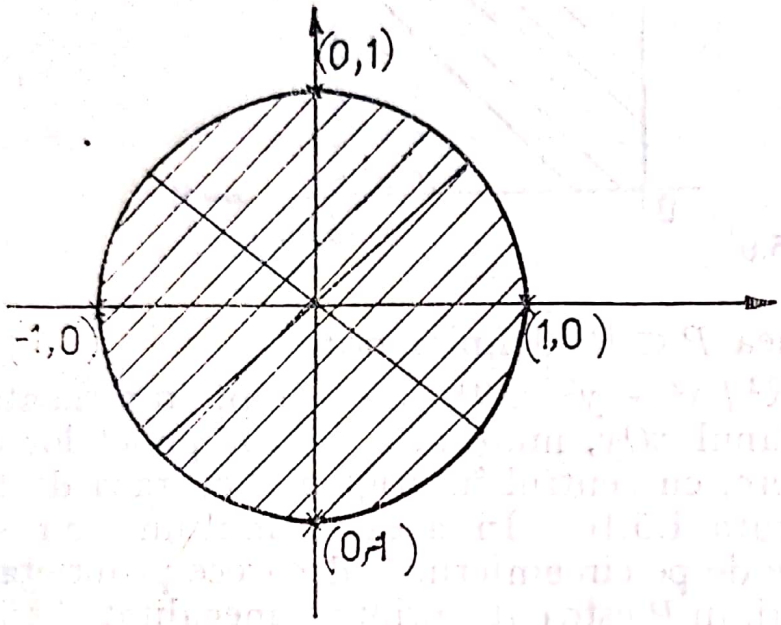


Fig. I.5.11

Mulțimea numerelor complexe. În unele probleme este util să folosim și alte numere, în afara celor reale, lărgind astfel, încă o dată, noțiunea de număr și anume, introducînd noțiunea de număr complex. După cum se știe, în mulțimea numerelor reale, nu se poate extrage rădăcina pătrată dintr-un număr strict negativ. Pentru a putea efectua o astfel de operație, introducem *simbolul imaginar*, notat cu i și definit astfel: $i = \sqrt{-1}$. Cu ajutorul acestui simbol putem efectua operația de extragere a rădăcinii pătrate dintr-un număr strict negativ, astfel: $\sqrt{x} = i\sqrt{-x}$, pentru $x < 0$. Rezultatul unei asemenea operații este un număr de forma bi, cu $b \in R$. Numerele de această formă se numesc numere imaginare.

Se numește *număr complex* un număi de forma: $z = a + bi$, cu $a, b \in R$. Acestui număr complex, i se atașează o valoare reală, numită *modul*ul său, notat și definit astfel: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. După cum se știe, numărul real a se numește *partea reală* a numărului complex z, iar bi se numește partea imaginară a acestui număr. Două numere complexe, care au aceeași parte reală, iar părțile imaginare opuse, se numesc numere complex-conjugate. Astfel, numărul complex-con-

Scanned with OKEN Scanner

jugat numărului $z = a + bi$, notat de obicei prin z, are forma $z = a - bi$.

Nu descriem, în cele ce urmează, modul de efectuare a operațiilor și proprietățile acestor operații, în mulțimea numerelor complexe. Toate acestea le vom presupune cunoscute. Amintim doar faptul că două numere complexe sînt egale, atunci și numai atunci cînd părțile lor reale sînt egale, iar părțile lor imaginare sînt de asemenea egale. De asemenea, menționăm că mulțimea numerelor complexe, pe care o notăm cu C, nu este ordonată, astfel încît dîndu-se două numere complexe oarecare, nu putem spune că unul dintre ele este mai mare, sau mai mic, decît celălalt.

Încheiem scurta prezentare a numerelor complexe, cu observația că mulțimea numerelor reale este o submulțime a mulțimii numerelor complexe ($R \subset C$), ea fiind compusă din acele numere complexe $a + bi$, $a, b \in R$, pentru care $b = 0$.

Probleme date spre rezolvare

1. Să se arate că numărul $\sqrt{3}$ nu este număr rațional, adică nu poate fi pus sub forma $\frac{m}{n}$, cu $m, n \in Z$.

2. Să se efectueze intersecția: $A \cap B \cap C \cap D$, unde $A = (-5, 7]$; $B = [-1, 4]$; $C = [0, 8)$; $D = (-\infty, 2)$.

3. Să se efectueze operația de reuniune:
$[-2, 8) \cup (-3, 5) \cup (0, \infty)$.

4. Fie intervalele: $A = [-3, 2]$; $B = [0, 5]$; $C = (5, 6]$. Să se efectueze operațiile indicate de expresia $(A \cap B) \cup C$.

5. Să se reprezinte geometric, în planul xOy, următoarele submulțimi ale spațiului cu două dimensiuni:

a) $A = \{(x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 \geqslant 8\}$.
b) $B = \{(x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leqslant 16$ și $x - y \geqslant 0\}$.
c) $C = \{(x, y) \in R^2 / x - y = 0\}$.

6. Să se calculeze modulele următoarelor numere complexe:

a) $z_1 = 2 - 3i$
b) $z_2 = 5 + 12i$
c) $z_3 = -4 + 5i$
d) $z_4 = -3 - 4i$

Exemplu: $|z_1| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$.

7. Să se determine valorile pe care le pot avea cantitățile $x, y \in R$, astfel încît să aibă loc egalitatea:

a) $x + yi = 3 + 5i$.
b) $x - 1 + i(x - y + 1) = 2 - 3i$.

Scanned with OKEN Scanner

I.6. Matrice

O *matrice*, de dimensiuni $m \times n$, este un tablou dreptunghiular de mn numere reale, așezate pe m linii și n coloane (numerele se numersc *elementele* matricei). Matriceıe se notează de obicei cu litere mari de tipar, ale alfabetului latin. Adesea, pentru a evidenția dimensiunile unei matrice, ele se pot atașa, sub formă de indice. Astfel, putem reprezenta o matrice prin A, sau chiar prin $A_{m\times n}$. În cele ce urmează, vom nota o astfel de matrice, astfel:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Notînd cu a_{ij} un element oarecare al matricei A, element așezat pe linia de ordin i ($i = 1, 2, \dots, m$) și pe coloana de ordin j ($j = 1, 2, \dots, n$), această matrice se mai poate reprezenta simbolic, astfel: $A = (a_{ij}), i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$. În cazul cînd $m = n$, A se numește *matrice pătrată de ordin n* și se notează $A = (a_{ij})_n$. La o astfel de matrice, elementele pot fi separate prin așa numita *diagonală principală*, formată din toate elementele de forma a_{ij}, $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Fiind dată o matrice A, se numește matrice *transpusă* a sa, matricea obținută din cea dată, transformînd liniile în coloane și coloanele în linii. Vom nota prin A^t această transpusă. Ea se poate scrie ușor, cînd matricea A pe linii și rescriind-o pe coloane:

$$A^t \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Exemple de matrice

1. Matricea A, ce urmează, are dimensiunile 2×3, fapt ce se poate scoate în relief și prin notația $A_{2\times 3}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Transpusa acestei matrice este următoarea·

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2. Fie matricea pătrată de ordinul al treilea, notată cu B, precum și transpusa ei:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad B^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

observăm că, prin transpunere, diagonala principală se păstrează, ea fiind formată din elementele —1, 0 și 4. Proprietatea este generală și ușor de explicat.

Observații. 1. Noțiunea de matrice poate fi definită mai general, considerînd elementele a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, ca aparținînd unei mulțimi oarecare k, ce formează un corp. În acest caz, se vorbește despre mulțimea matricelor, definite peste corpul k. În cele ce urmează, ne vom limita la cazul $K = R$, cînd elementele matricelor sînt numere reale.

2. Matricea de dimensiuni 1×1, al cărei unic element este $a_{11} \in R$, se consideră că reprezintă chiar numărul real a_{11}. Numerele reale mai poartă denumirea de *scalari*.

Egalitatea matricelor. O matrice este determinată atît prin elementele ei, cît și prin așezarea lor, astfel încît vom spune că două matrice sînt egale dacă au aceleași dimensiuni și dacă elementele la fel așezate sînt respectiv egale.

$(a_{ij})_{m\times n} = (b_{ij})_{m\times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$ pentru orice i și orice j.

Exemple de aplicare a definiției egalității de matrice

1. Egalitatea matriceală:

$$\begin{pmatrix} x & x+y \\ 2 & y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

nu poate avea loc decît dacă sînt îndeplinite simultan condițiile: $x = 3$; $x + y = 5$; $2 = 2$; $y + z = 1$.

2. Avem în mod cert:

$$\begin{pmatrix} x & 2 & 3 \\ -1 & y & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

deoarece elementele de pe linia întîi și coloana a doua, din aceste două matrice, nu pot fi egale ($2 \neq 3$).

Scanned with OKEN Scanner

3. O egalitate de forma:

$$\begin{pmatrix} x & 3 \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

nu poate avea loc pentru nici o valoare atribuită lui x, deoarece o astfel de egalitate impune pe de o parte $x = 2$ (prin egalarea elementelor din stînga sus), iar pe de altă parte $x = -1$ (prin egalarea elementelor din dreapta jos). Evident, aceste două condiții nu pot fi satisfăcute simultan.

Adunarea matricelor. Operația de adunare a două matrice se definește numai pentru cazul cînd ele au aceleași dimensiuni. Astfel, suma matricelor A și B, ambele de dimensiuni $m \times n$, este o matrice C, cu dimensiunile $m \times n$, ale cărei elemente sînt sumele elementelor corespunzătoare din A și B:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

O matrice cu toate elementele egale cu zero se notează simbolic cu 0, indicînd uneori (pentru a înlătura confuziile) și dimensiunile ei. O astfel de matrice are proprietatea că adunată cu oricare matrice, de aceleași dimensiuni cu ea, dă ca rezultat matricea cu care s-a adunat: $0 + A = A$, oricare ar fi A. Datorită acestei proprietăți, se spune că matricea nulă, de dimensiunile $m \times n$, este element de efect nul, în operația de adunare a matricelor cu aceste dimensiuni.

Exemple de adunare a matricelor

1. Matricele A și B, de mai jos, avînd aceleași dimensiuni, suma lor efectuîndu-se astfel:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & -1+2 & 1+2 \\ 3-3 & 2-1 & -3+2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2. În cadrul adunării matricelor de dimensiuni 3×2, elementul de efect nul este următoarea matrice nulă:

$$0_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Astfel, considerînd o matrice oarecare, de dimensiuni 3×2, notată cu A, avem:

$$0 + A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+3 & 0-2 \\ 0+1 & 0+0 \\ 0+3 & 0+4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = A.$$

Înmulțirea matricelor cu scalari. Produsul dintre un număr real (scalar) și o matrice se definește ca fiind o matrice cu aceleași dimensiuni ca matricea folosită și ale cărei elemente se obțin prin înmulțirea tuturor elementelor matricei date cu numărul real:

$$k \cdot A = k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \dots ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} \dots ka_{2n} \\ ka_{m1} & ka_{m2} \dots ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

În plus, definim matricea opusă a unei matrice A, notată cu $-A$, ca pe produsul $(-1) \cdot A$. Ea se obține deci, schimbînd toate semnele elementelor din A. De asemenea, definim diferența a două matrice (cu aceleași dimensiuni), astfel: $A - B = A + (-B)$.

Exemple de înmulțire a unei matrice cu un scalar

1. Fiind dată matricea A, folosită mai jos, produsul ei cu scalarul -3 se efectuează după cum urmează:

$$-3 \cdot A = -3 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \cdot 2 & -3 \cdot (-1) & -3 \cdot 4 \\ -3 \cdot (-3) & -3 \cdot 1 & -3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -12 \\ 9 & -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2. Considerînd matricele A și B, de dimensiuni 2×2, folosite în calculele de mai jos, avem:

$$2 \cdot A - B = 2 \cdot A + (-1) \cdot B = 2 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} +$$

$$+ (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proprietățile matricelor, în raport cu operațiile de adunare și înmulțire cu scalari. Fie M mulțimea tuturor matricelor cu dimensiunile $m \times n$. Pentru orice matrice $A, B, C \in M$ și pentru orice scalari $k, m \in R$, sînt verificate următoarele relații, ce pot fi justificate cu ușurință de către cititor:

$(A+B)+C = A+(B+C)$, $\quad k \cdot (A + B) = kA + kB$,
$A + B = B + A$, $\quad (k + m) \cdot A = k \cdot A + m \cdot A$,
$A + 0 = A$, $\quad (km) \cdot A = k \cdot (mA) = m \cdot (kA)$,
$A + (-A) = 0$, $\quad 1 \cdot A = A$, $0 \cdot A = 0$.

În aceste relații, simbolul 0 a reprezentat uneori matricea nulă, alteori numărul zero. Astfel, de pildă, în relația $0 \cdot A = 0$, zeroul din partea stîngă este un scalar, iar cel din partea dreaptă reprezintă o matrice nulă (de ordinul $m \times n$). Iată un exemplu de aplicare a proprietății, din care rezultă clar cele precizate:

$$0 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 & -3 \cdot 0 \\ 4 \cdot 0 & 5 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Produsul a două matrice se definește numai în cazul cînd numărul coloanelor primului factor este egal cu numărul liniilor celui de al doilea factor. Fiind îndeplinită această condiție, rezultatul înmulțirii este o matrice care are tot atîtea linii ca și primul factor și tot atîtea coloane ca și cel de al doilea factor. Astfel, notînd cu $m \times n$ dimensiunile primului factor (matricea A), iar cu $n \times p$ dimensiunile celui de al doilea factor (matricea B), produsul acestor două matrice (notat cu C) are dimensiunile $m \times p$:

$$A_{m \times n} B_{n \times p} = C_{m \times p}.$$

În ceea ce privește regula practică de determinare a matricei produs, un element oarecare al său, notat cu c_{ij} (de pe linia de ordin i și coloana de ordin j), se obține așa cum se

Scanned with OKEN Scanner

arată în continuare. Considerăm linia de ordin i din matricea A (primul factor) și coloana de ordin j din matricea B (al doilea factor), asupra cărora aplicăm următoarele operații: înmulțim primul element al liniei folosite, cu primul element al coloanei folosite, al doilea element al liniei cu al doilea element ai coloanei ș.a.m.d., în final, însumînd rezultatele parțiale obținute în acest mod. Această regulă de calcul, al matricei produs, a fost impusă de posibilitățile de aplicare practică a calculului cu matrice, în diferite domenii ale matematicii (astfel definită, înmulțirea matricelor are cele mai multe posibilități de folosire practică). Menționăm în plus că, pentru scrierea produsului dintre două matrice, nu se folosește nici un semn distinctiv al acestei operații, scriind efectiv cei doi factori unul după altul (de pildă, produsul dintre matricea A și matricea B se notează simplu prin AB).

Exemple de efectuare a produsului de matrice

1. Fie matricele:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Deoarece numărul coloanelor matricei A coincide cu numărul liniilor matricei B, se poate efectua produsul AB. În plus, deoarece matricea A are două linii, iar matricea B trei coloane, rezultatul va avea două linii și trei coloane: $A_{2\times 2}\, B_{2\times 3} = C_{2\times 3}$. Să notăm elementele matricei C în modul indicat mai jos:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}.$$

Conform regulei indicate, elementul c_{11} se calculează cu ajutorul primei linii din A și primei coloane din B. Schematic, acestea arată astfel: $\boxed{-1 \quad 2}$ și $\boxed{\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}}$. Vom avea deci:

$$C_{11} = -1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = -2 + 6 = 4.$$

Elementul c_{12} se determină în mod asemănător, cu ajutorul primei linii din A și coloanei a doua din B: $\boxed{-1 \quad 2}$ și $\boxed{\begin{matrix} 4 \\ -1 \end{matrix}}$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem deci: $c_{12} = -1 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) = -4 - 2 = -6$.
În mod analog, calculăm și celelalte elemente ale matricei C, obținînd pe rînd:

$$c_{13} = -1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = -5 + 4 = -1,$$
$$c_{21} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 6 + 12 = 18,$$
$$c_{22} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot (-1) = 12 - 4 = 8,$$
$$c_{23} = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 = 15 + 8 = 23.$$

Astfel, putem scrie că:

$$C = AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -1 \\ 18 & 8 & 23 \end{pmatrix}.$$

2. Orice matrice pătrată se poate înmulți cu ea însăși, îndeplinind, evident, condiția necesară existenței produsului respectiv. Notînd cu A o matrice pătrată, se notează consecutiv

$$AA = A^2; \quad A^2A = A^3, \ldots, A^{n-1}A = A^n; \ldots$$

Să considerăm, ca exemplu, matricea pătrată: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.
Cu ajutorul ei, putem calcula, aplicînd regula de înmulțire a matricelor:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -12 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -12 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 9 \\ -27 & -10 \end{pmatrix}.$$

Proprietățile înmulțirii matricelor. Fie A, B, C, matrice arbitrare, care au dimensiuni corespunzătoare, astfel încît să poată fi efectuate toate produsele ce urmează, iar k un scalar oarecare. În aceste condiții, au loc egalitățile:
$(AB)C = A(BC)$, legea asociativității,
$A(B + C) = AB + AC$, legea distributivității la stînga,
$(B + C)A = BA + CA$ legea distributivității la dreapta,
$k(AB) = (kA)B = A(kB)$,
$0A = 0$, $A0 = 0$, unde 0 este matricea nulă.

Cititorul poate verifica aceste egalități pe cazuri particulare, sau le poate justifica în condiții generale. Cercetînd aceste proprietăți, observăm că nu apare o proprietate de comutativitate a matricelor. Într-adevăr, se poate arăta, pe

Scanned with OKEN Scanner

exemple numerice, că produsul de matrice AB nu este egal întotdeauna cu produsul BA. Mai mult, uneori unul dintre aceste produse există, iar celălalt nu, ca în cazul matricelor:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Matrice unitate. Considerînd mulțimea M, a tuturor matricelor pătrate de un ordin fixat (notat cu n), înmulțirea este posibilă între orice două matrice din această mulțime. Există o matrice pătrată de ordinul n, notată cu I, care are următoarea proprietate: înmulțită la stînga, sau la dreapta, cu oricare matrice din mulțimea M, o lasă neschimbată. Simbolic, scriem: $IA = AI = A$, oricare ar fi $A \in M$. Se poate arăta că există o singură matrice cu această proprietate, în mulțimea M, ea avînd toate elementele egale cu zero, cu excepția celor de pe diagonala principală, care sînt egale cu unu.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Cititorul poate verifica cu ușurință, pe exemple particulare sau pe cazul general, că această matrice are proprietatea menționată, ea fiind element de efect nul, în înmulțirea matricelor ce aparțin mulțimii M.

Probleme propuse spre rezolvare

1. Să se determine valorile reale x, y și z, astfel încît să poată avea loc egalitatea:

$$\begin{pmatrix} x & 5 & -1 \\ 4 & x-y & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & x+y & -1 \\ 4 & x-y & y-z \end{pmatrix}.$$

2. Fie matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze: a). $A + B$; b). $A - B$; c). $3 \cdot A - 2 \cdot B$; d). $2 \cdot A - B$.

3. Fie matricea A, de dimensiuni $m \times n$ și matricea B de dimensiuni $n \times p$, astfel încît să se poată efectua produsul AB. Să se arate că produsul BA există numai dacă $m = p$.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul II

ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ

II.1. Spaţii liniare n-dimensionale

După cum se ştie, un *vector cu n dimensiuni* (sau *vector n-dimensional*) este un sistem ordonat de n numere reale, numere numite *componentele vectorului*. Faptul că sistemul este ordonat înseamnă că are importanţă ordinea celor n numere, adică pentru a da un vector n-dimensional trebuie precizate nu numai cele n componente ale sale, dar şi care dintre ele este prima, care este a doua ş.a.m.d.

Un vector se reprezintă printr-o matrice cu o singură linie sau cu o singură coloană, pe linia sau coloana respectivă scriindu-se cele n componente, în ordinea numerotării lor. Astfel, de pildă, vectorul

$$u = (3 \quad -5 \quad 0 \quad 2)$$

este un vector-linie cu patru dimensiuni, iar vectorul

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

este un vector-coloană cu trei dimensiuni.

Din motive de micşorare a spaţiului scrierii, uneori vom reprezenta vectorul-coloană v sub următoarea formă:

$$v = (0 \quad 4 \quad -3)^t,$$

indicele superior „t" indicînd că matricea corespunzătoare (cu o singură linie) trebuie considerată ca transpusă (ca o coloană). Evident, acest mod de notare este general, putînd fi folosit la orice vector-coloană.

Observaţie. Reprezentarea vectorilor ca matrici-linii sau ca matrici-coloane este o chestiune de convenţie, fiecare

Scanned with OKEN Scanner

dintre aceste notații indicînd exact ordinea componentelor. În aplicațiile practice, se va folosi unul sau celălalt mod de reprezentare, după cum este mai convenabil în aplicațiile respective. În materialul de față, vom prefera cel mai adesea reprezentarea sub formă de vectori-coloane, ea utilizîndu-se îndeosebi în programarea liniară. Evident, toate proprietățile și regulile de calcul, ce vor fi prezentate, sînt valabile și la cealaltă reprezentare, cu corecția respectivă.

Exemple de vectori. **1.** Dacă într-o secție a unei întreprinderi se fabrică cinci tipuri de produse, P_1, P_2, P_3, P_4 și P_5, producîndu-se zilnic cantități egale, respectiv cu 5 t, 5 t, 10 t, 12 t, 12 t, planul zilnic de producție al secției poate fi reprezentat prin vectorul:

$$v = (5 \quad 5 \quad 10 \quad 12 \quad 12)^t,$$

ordinea produselor fiind cea dată mai sus.

2. Dacă pe o mașină se pot prelucra trei tipuri de piese, P_1, P_2 și P_3, fiecare piesă avînd un anumit timp de prelucrare pe această mașină, egal cu 12 minute pentru piesele de tipul P_1, 15 minute pentru cele de tipul P_2 și 17 minute pentru P_3, vectorul consumurilor unitare de timp, al celor trei tipuri de piese, va fi dat de:

$$v = (12 \quad 15 \quad 17)^t.$$

Totalitatea vectorilor cu cîte n componente (n natural, fixat) formează *spațiul liniar n-dimensional*, notat cu R^n. În acest sens, putem scrie, de pildă:

$$(2 \quad -1 \quad 5)^t \in R^3; \qquad (1 \quad -1 \quad 0 \quad 2)^t \in R^4, \text{ etc.}$$

Printre vectorii din R^n se găsește și cel care are toate componentele egale cu zero; acesta se numește *vectorul nul* și se notează simbolic cu 0 (eventual cu zero îngroșat). Evident, fiecare spațiu liniar R^n are cîte un vector nul, putînd scrie, de exemplu:

$$0 = (0 \quad 0 \quad 0)^t \in R^3; \qquad 0 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^t \in R^4; \text{ etc.}$$

Cu vectorii din spațiul liniar R^n, se pot efectua operații de adunare și de înmulțire cu scalari. Astfel, pentru a aduna

doi vectori din R^n, se adună succesiv componentele de același rang. De exemplu:

$$(2 \quad -3 \quad 4)^t + (5 \quad -1 \quad -2)^t = (2+5 \quad -3+(-1) \quad 4-2)^t = \\ = (7 \quad -4 \quad 2)^t,$$

$$(-3 \quad 2 \quad 5 \quad 4)^t + (3 \quad -2 \quad -5 \quad -4)^t = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^t = 0.$$

Observații importante. 1. Nu se poate efectua adunarea a doi vectori, dacă ei nu aparțin aceluiași spațiu (dacă ei nu au același număr de componente).

2. Suma a doi vectori din R^n este tot un vector din R^n.

Pentru a înmulți un vector cu un scalar (un număr real, pozitiv, negativ sau chiar zero), înmulțim toate componentele vectorului cu acest scalar. De exemplu:

$$-5 \cdot (0 \quad -4 \quad 1)^t = (-5 \cdot 0 \quad -5 \cdot (-4) \quad -5 \cdot 1)^t = (0 \quad 20 \quad -5)^t.$$

Observații. 1. Produsul dintre un vector n-dimensional și un scalar este totdeauna un vector n-dimensional.

2. Opusul unui vector $v \in R^n$, notat cu $-v$, este vectorul obținut din înmulțirea $(-1) \cdot v$, el avînd deci componentele respective opuse, față de componentele vectorului v. Se observă că: $v + (-v) = v - v = 0$.

3. Operația inversă adunării, scăderea, poate fi redusă la operația de adunare, astfel: $u - v = u + (-v)$.

Operațiile definite în R^n (n natural, fixat) au anumite proprietăți, asupra cărora nu ne oprim, dar care sînt proprietăți mult mai generale, ce definesc spațiile vectoriale.

Putem denumi — deci — pe R^n ca fiind un *spațiu vectorial n-dimensional*.

Definiție. Fiind dați vectorii v_1 și v_2, din același spațiu R^n, se numește *combinație liniara* a lor orice expresie de forma $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, unde λ_1 și λ_2 sînt scalari.

Combinația liniară se zice *convexă*, dacă λ_1 și λ_2 sînt nenegativi și suma lor este egală cu unu. O combinație convexă a doi vectori v_1 și v_2 se mai poate scrie și sub forma echivalentă: $\lambda \cdot v_1 + (1 - \lambda) \cdot v_2$, cu $\lambda \in [0; 1]$.

Observație. Pentru scalari λ_1 și λ_2 fixați, combinația liniară a doi vectori, $v_1, v_2 \in R^n$, conduce — prin efectuarea calculelor — tot la un vector din R^n.

Scanned with OKEN Scanner

Exemple. Dacă $v_1 = (3 \quad -2 \quad 4)^t$ și $v_2 = (-2 \quad 1 \quad -1)^t$, putem calcula următoarele combinații liniare ale lor:

$$v_1 + 2v_2 = (3 \quad -2 \quad 4)^t + 2 \cdot (-2 \quad 1 \quad -1)^t = (3 \quad -2 \quad 4)^t + \\ + (-4 \quad 2 \quad -2)^t = (-1, \quad 0 \quad 2)^t;$$

$$3v_1 - 5v_2 = 3 \cdot (3 \quad -2 \quad 4)^t - 5 \cdot (-2 \quad 1 \quad -1)^t = \\ = (9 \quad -6 \quad 12)^t + (10 \quad -5 \quad 5)^t = (19 \quad -11 \quad 17)^t;$$

$$\frac{1}{3} v_1 + \frac{2}{3} v_2 = \frac{1}{3} (3 \quad -2 \quad 4)^t + \frac{2}{3} (-2 \quad 1 \quad -1)^t =$$

$$= \left(1 \quad -\frac{2}{3} \quad \frac{4}{3}\right)^t + \left(-\frac{4}{3} \quad \frac{2}{3} \quad -\frac{2}{3}\right)^t = \left(-\frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{2}{3}\right)^t.$$

Ultima combinație liniară, calculată mai sus, este o combinație liniară convexă a vectorilor v_1 și v_2.

Noțiunea de combinație liniară se poate generaliza la mai mulți vectori. Astfel, fiind dați $v_1, v_2, \ldots, v_k \in R^n$, o combinație liniară oarecare a lor are forma: $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \ldots + \lambda_k \cdot v_k$, unde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$ sînt scalari.

Această combinație liniară este convexă, dacă:

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \ldots, \lambda_k \geqslant 0$$

și

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

Exemple. Dacă $v_1 = (2 \ 0 \ -1 \ 3)^t$; $v_2 = (-1 \ 4 \ 2 \ 0)^t$ și $v_3 = (8 \ -8 \ -7 \ 9)^t$, putem calcula următoarele combinații liniare ale lor, a treia fiind convexă.

$$2v_1 - 3v_2 - v_3 = 2 \cdot (2 \quad 0 \quad -1 \quad 3)^t - 3 \cdot (-1 \quad 4 \quad 2 \quad 0)^t - \\ - 1 \cdot (8 \quad -8 \quad -7 \quad 9)^t = (4 \ 0 \ -2 \ 6)^t + (3 \ -12 \ -6 \ 0) + \\ + (-8 \ 8 \ 7 \ -9)^t = (-1 \ -4 \ -1 \ -3)^t;$$

$$3v_1 - 2v_2 - v_3 = 3 \cdot (2 \quad 0 \quad -1 \quad 3)^t - 2 \cdot (-1 \quad 4 \quad 2 \quad 0)^t - \\ - (8 \quad -8 \quad -7 \quad 9)^t = (6 \ 0 \ -3 \ 9)^t + (2 \ -8 \ -4 \ 0)^t + \\ + (-8 \ 8 \ 7 \ -9)^t = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^t = 0;$$

$$\frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{3} v_2 + \frac{1}{6} v_3 = \frac{1}{2} \cdot (2 \ 0 \ -1 \ 3)^t + \frac{1}{3} \cdot (-1 \ 4 \ 2 \ 0)^t + \\ + \frac{1}{6} \cdot (9 \ -8 \ -7 \ 9)^t = \left(1 \ 0 \ -\frac{1}{2} \ \frac{3}{2}\right)^t + \\ + \left(-\frac{1}{3} \ \frac{4}{3} \ \frac{2}{3} \ 0\right)^t + \left(\frac{4}{3} \ -\frac{4}{3} \ -\frac{7}{6} \ \frac{3}{2}\right)^t = (2 \ 0 \ -1 \ 3)^t.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru introducerea noțiunii de dependență liniară a vectorilor, să considerăm mai întîi un exemplu numeric.

Fie următorii trei vectori din spațiul R^4:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Cercetînd cu atenție acești trei vectori, observăm că cel de al treilea se poate obține din primii doi, cu relația:

$$v_3 = v_1 + 2v_2.$$

Într-adevăr:

$$v_1 + 2v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = v_3.$$

Trecînd pe v_3 în partea cealaltă, cu semn schimbat, relația poate fi scrisă și sub forma:

$$v_1 + 2v_2 - v_3 = 0$$

Vom spune că între cei trei vectori dați există următoarea *relație de dependență liniară:* $v_1 + 2v_2 - v_3 = 0$ (partea dreaptă este vectorul nul din R^4). Evident că din această relație am putea exprima și pe v_1 în funcție de v_2 și v_3 ($v_1 = -2v_2 + v_3$), respectiv pe v_2 în funcție de v_1 și v_3 $\left(v_2 = -\frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_3\right)$. Toate aceste egalități pot fi verificate cu ușurință, ca mai sus.

Generalizînd cele de mai sus, vom spune că între vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_m$, din R^n, există o *relație de dependența liniară*, dacă are loc cel puțin o egalitate de forma:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = 0,$$

în care scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ nu sînt toți nuli. În condițiile existenței unei astfel de relații, spunem că vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_m$ sînt *liniar dependenți*, sau că sistemul de vectori $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ este *liniar dependent*. În caz contrar, cînd o astfel de relație nu există, spunem că vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_m$ sînt *liniar independenți*, sau că sistemul $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ este *liniar independent*.

Scanned with OKEN Scanner

Observaţii importante. 1. O relaţie de forma $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ este evident verificată pentru $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$, atît în cazul cînd vectorii sînt liniar independenţi, cît şi în cazul cînd vectorii sînt liniar dependenţi. Ceea ce deosebeşte cele două situaţii descrise mai sus este faptul că relaţia este satisfăcută numai pentru toţi scalarii nuli, în cazul vectorilor liniar independenţi, iar relaţia este satisfăcută şi pentru unii scalari nenuli (eventual toţi), în cazul vectorilor liniar dependenţi. Putem scrie deci, pe scurt, definiţiile corespunzătoare, sub forma schemei următoare:

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ —
- se verifică *numai pentru* toţi λ_i nuli $\Rightarrow$ vectori liniar independenţi
- se verifică *şi pentru* unii λ_i nenuli $\Rightarrow$ vectori liniar dependenţi.

2. Dacă între vectorii sistemului $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ există relaţia de dependenţă liniară $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$, din această relaţie poate fi scos orice vector, al cărui coeficient este diferit de zero, ca o combinaţie liniară de ceilalţi vectori ai sistemului. De exemplu, dacă $\lambda_1 \neq 0$, putem scrie:

$$v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} v_3 - \ldots - \frac{\lambda_m}{\lambda_1} v_m = k_2 v_2 + k_3 v_3 + \ldots + k_m v_m,$$

unde am notat: $-\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = k_2, \; -\frac{\lambda_3}{\lambda_1} = k_3, \; \ldots, \; -\frac{\lambda_m}{\lambda_1} = k.$

Evident, dacă $\lambda_1 = 0$, acest lucru nu va mai fi posibil.

Pentru a cerceta dependenţa sau independenţa unui sistem de vectori, avem nevoie de o metodă matematică, simplele încercări cu diferitele combinaţii liniare neputînd avea sorţi de izbîndă decît arareori. Vom prezenta justificarea acestei metode pe baza exemplului descris mai sus, văzînd însă, de fiecare dată, în spatele calculelor ce le vom efectua, generalitatea acestor calcule, urmînd ca în final să scoatem concluzii generale. Astfel, ne punem de la început întrebarea în ce condiţii poate avea loc o relaţie de forma:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 \lambda_3 = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

adică dacă ea poate fi verificată numai pentru toți λ_i nuli, sau și pentru λ_i nenuli. Înlocuim vectorii în această relație și avem:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}2\\-1\\6\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\2\\-8\\2\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}4\\3\\0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \text{sau:}$$

$$\begin{pmatrix}2\lambda_1+\lambda_2+4\lambda_3\\-\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3\\6\lambda_1-3\lambda_2\\2\lambda_2+4\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Pentru ca această ultimă egalitate să aibă loc, trebuie ca λ_1, λ_2 și λ_3 (necunoscutele noastre) să verifice următorul sistem liniar și omogen, cu patru ecuații:

$$\begin{aligned}2\lambda_1+\lambda_2+4\lambda_3&=0,\\-\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3&=0,\\6\lambda_1-3\lambda_2&=0,\\2\lambda_2+4\lambda_3&=0,\end{aligned}$$

Notînd cu $\lambda=(\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3)^t$ o soluție a acestui sistem, întregul sistem se poate reprezenta sub forma $A\lambda=0$ (în partea dreaptă este o matrice nulă cu o singură coloană), cu A fiind notată matricea formată cu coeficienții necunoscutelor.

Evident, această reprezentare este generală soluția λ putînd fi adaptată în funcție de numărul de necunoscute. După cum se știe, pentru a stabili numărul de soluții, pe care le are un sistem liniar și omogen, este suficient să se calculeze rangul matricei A, a sistemului, existînd următoarele două posibilități:

— dacă rangul matricei A este egal cu numărul necunoscutelor, sistemul are o singură soluție (este determinat), aceasta fiind soluția banală (toate necunoscutele egale cu zero);

— dacă rangul matricei A este mai mic decît numărul nescunoscutelor, sistemul admite și alte soluții, în afara soluției banale (este nedeterminat).

Scanned with OKEN Scanner

Matricea A este, în cazul exemplului nostru:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{array} \right) \end{array}$$

și are drept coloane vectorii ce s-au dat inițial. Urmărind calculele efectuate mai sus, deducem că această observație este generală, totdeauna coloanele matricei sistemului care se obține fiind egale cu vectorii dați. În plus, numărul necunoscutelor, din sistemul de ecuații, coincide întotdeauna cu numărul vectorilor ce se cercetează. Ținînd seama de acestea și combinînd cu proprietatea enunțată mai sus, a sistemelor de ecuații liniare și omogene, deducem următoarea teoremă:

Teorema II.1.1. Condiția necesară și suficientă, ca un sistem de vectori să fie liniar dependent, este ca rangul matricei, ale cărei coloane sînt vectorii dați, să fie mai mic decît numărul vectorilor.

Regulă practică: petru a cerceta dependența sau independența sistemelor de vectori:

— se scrie matricea A, ale cărei coloane sînt vectorii dați,

— se calculează rangul matricei A,

— dacă rangul matricei A este egal cu numărul vectorilor, deducem că vectorii sînt liniar independenți,

— dacă rangul matricei A este mai mic decît numărul vectorilor, deducem că vectorii sînt liniar dependenți.

În cazul exemplului folosit, pentru a calcula rangul matricei A, pornim de la următorul determinant minor, de ordinul al doilea, diferit de zero:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Bordînd acest minor cu cîte o linie și o coloană dintre cele nefolosite, obținem următorii determinanți:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece toți determinanții minori, obținuți prin bordarea lui D_1, cu cîte o linie și o coloană, dintre cele nefolosite, sînt nuli, D_1 este un determinant principal și rangul matricei A este egal cu doi. Rezultă că vectorii v_1, v_2 și v_3 sînt liniar dependenți. Pentru scrierea unei relații de dependență dintre acești vectori, trebuie să găsim efectiv o soluție nebanală a sistemului $A\lambda = 0$. Știind că sistemul este nedeterminat și că D_1 este determinant principal, păstrăm — din sistem — numai primele două ecuații (ecuațiile principale) și dăm lui λ_3 (necunoscuta neprincipală) o valoare nenulă oarecare, de exemplu $\lambda_3 = 1$.

Se obține — astfel — sistemul:

$$2\lambda_1 + \lambda_2 + 4 = 0,$$

$$-\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3 = 0,$$

care conduce la: $\lambda_1 = -1$ și $\lambda_2 = -2$. Înlocuind în relația de dependență generală de la care s-a pornit,

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0,$$

se obține efectiv această relație: $-v_1 - 2v_2 + v_3 = 0$. Aceasta este chiar relația observată la început.

Sintetizînd cele de mai sus, putem spune că pentru a determina o relație de dependență liniară a vectorilor ce s-au dovedit liniar dependenți, trebuie să efectuăm următoarele operații:

— păstrăm din sistemul $A\lambda = 0$ numai ecuațiile principale;

— dăm necunoscutelor neprincipale valori nu toate nule, de exemplu uneia dintre ele valoarea unu și celorlalte valori egale cu zero;

— rezolvăm sstemul obținut;

— înlocuim valorile găsite în forma generală a relației de dependență.

Observații. 1. Dacă, în exemplul rezolvat mai sus, în care există o singură necunoscută neprincipală, am fi dat acestei necunoscute altă valoare, $\lambda_3 = k \neq 0$, am fi obținut aceeași relație de dependență, dar amplificată prin k. Lăsăm pe seama cititorului verificarea acestei observații.

2. Dacă sistemul $A\lambda = 0$ are mai multe nescunoscute neprincipale, fie numărul lor egal cu p, se pot obține, conform regulii generale de mai sus, p relații de dependență liniară independente. Pentru aceasta, repetăm de p ori metoda, în-

Scanned with OKEN Scanner

locuind pe rînd cîte o necunoscută neprincipală prin unu, iar pe celelalte prin zero.

O consecință importantă, a teoremei ce dă condiția necesară și suficientă de dependență a sistemului de vectori, este aceea care afirmă că numărul maxim de vectori liniar independenți dintr-un spațiu R^n este egal cu dimensiunea spațiului (cu n). Acest fapt se mai exprimă și prin propoziția că n vectori liniar independenți din R^n formează un *sistem maximal* de vectori liniar independenți din acest spațiu. Această afirmație rezultă ușor din figura II.1.1., în care este

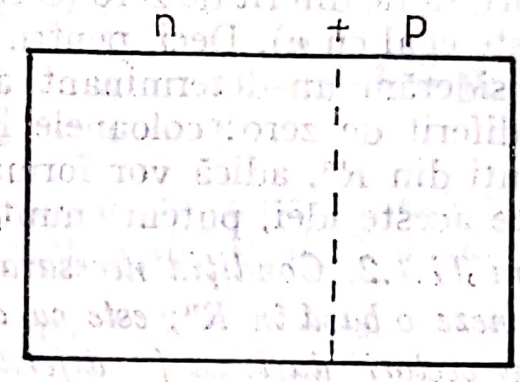


Fig. II.11.

reprezentată schematic o matrice ale cărei coloane sînt $(n + p)$ vectori din spațiul R^n: această matrice are sigur rangul mai mic decît numărul vectorilor, acest rang neputînd fi decît cel mult egal cu n. Deci, deducem că nu pot exista mai mult de n vectori liniar independenți. În schimb, se poate da un exemplu de sistem cu n vectori liniar independenți din R^n și anume $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, unde:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Într-adevăr, matricea ale cărei coloane sînt vectorii din sistemul S este matricea unitate de ordinul n și deci are rangul egal cu numărul vectorilor. Vectorii ce formează acest sistem se numesc *vectorii unitari* ai spațiului R^n.

Important de reținut: un vector unitar al spațiului R^n este un vector care are o singură componentă egală cu unu, celelalte fiind egale cu zero. Vom numi *primul vector unitar* pe cel care are componenta egală cu unu pe prima poziție, *al doilea vector unitar* pe cel care are componenta egală cu unu pe a doua poziție, ș.a.m.d.

Scanned with OKEN Scanner

Una dintre cele mai importante noțiuni, din teoria spațiile liniare, este aceea de *bază a unui spațiu liniar* R^n, aceasta fiind definită ca un sistem maximal de vectori liniar independenți ai spațiului. Cu alte cuvinte, *orice sistem de n vectori liniar independenți din* R^n *reprezintă o bază a acestui spațiu.* La întrebarea cîte baze există în spațiul liniar R^n?, putem răspunde că există o infinitate de astfel de baze. Într-adevăr, putem imagina o infinitate de sisteme de cîte n vectori din R^n, ce sînt liniar independenți: este suficient ca determinantul matricei, ale cărei coloane sînt cei n vectori, să fie diferit de zero (ceea ce înseamnă că rangul matricei este egal cu n). Deci, pentru a scrie o bază oarecare în R^n, considerăm un determinant arbitrar, de ordinul n, care este diferit de zero: coloanele lui vor fi vectori liniar independenți din R^n, adică vor forma o bază în R^n. Sintetizînd toate aceste idei, putem enunța următoarea teoremă.

Teorema II.1.2. Condiția necesară și suficientă ca n vectori să formeze o bază în R^n, *este ca determinantul, ale cărui coloane sînt vectorii dați, să fie diferit de zero.*

Exemplu: Deoarece determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

cele trei coloane ale sale sînt trei vectori ce formează o bază în R^3. Notînd deci:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

putem spune că sistemul $\{v_1, v_2, v_3\}$ reprezintă o bază în R^3.

Cea mai importantă proprietate a noțiunii de bază este cea conținută în următoarea teoremă:

Teorema II.1.3. Orice vector din spațiul R^n *poate fi reprezentat în mod unic ca o combinație liniară a vectorilor unei baze a spațiului* R^n.

Nu vom insista asupra demonstrației generale, vom justifica această teoremă pe baza unui exemplu numeric, cititorul putînd reface justificarea pe cazul general. Astfel, fie baza B,

Scanned with OKEN Scanner

a spațiului R^3, formată din vectorii a_1, a_2 și a_3, precum și vectorul $v \in R^3$, de mai jos:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 15 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Putem verifica ușor faptul că vectorii a_1, a_2 și a_3 formează o bază în R^3, calculînd valoarea determinantului, ale cărui coloane sînt acești vectori:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Încercăm acum să găsim trei numere reale, x_1, x_2 și x_3 (deocamdată necunoscute), astfel încît să avem:

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3.$$

Înlocuind în această relație vectorii pe componente, egalitatea se scrie astfel:

$$\begin{pmatrix} 15 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Efectuînd, mai întîi, înmulțirile cu scalari, apoi adunarea din partea dreaptă, obținem:

$$\begin{pmatrix} 15 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 + x_3 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Această egalitate are loc numai dacă sînt satisfăcute simultan cele trei ecuații ale sistemului:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &= 15, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 &= -7, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 4, \end{aligned}$$

Prin urmare, valorile căutate pentru x_1, x_2 și x_3 se pot determina prin rezolvarea unui sistem de trei ecuații cu trei necunoscute. Să observăm că matricea acestui sistem, pe

Scanned with OKEN Scanner

care o notăm cu A, are drept coloane vectorii care formează baza, în ordinea dată. Dacă notăm cu $X = (x_1\ x_2\ x_3)^t$ coloana valorilor necunoscutelor, forma matricială a sistemului de mai sus este următoarea:

$$AX = v.$$

Deoarece determinantul sistemului este nenul, fapt verificat odată cu existența bazei B, prin rezolvarea lui obținem o soluție și numai una singură. Obținem:

$$x_1 = 4; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = 5.$$

În consecință, putem scrie vectorul v ca o combinație liniară a vectorilor bazei B, astfel:

$$v = 4a_1 - 2a_2 + 5a_3.$$

Urmărind raționamentul și calculele de mai sus, putem observa că ele pot fi repetate pentru orice exemplu asemănător.

Deducem, deci, următoarea:

Regulă practică de descompunere (exprimare) a unui vector într-o bază:

Fiind dată o bază $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, a spațiului R^n, precum și un vector oarecare $v \in R^n$, descompunerea (exprimarea) vectorului v în baza B are forma:

$$v = x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n,$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt scalari (determinați în mod unic de această descompunere) numiți *coordonatele vectorului v în vaza B.*

Coordonatele vectorului v formează un vector X, soluție a sistemului $AX = v$ unde A este matricea ale cărei coloane sînt vectorii ce formează baza.

Exemplu. Fie baza B din R^3, formată cu vectorii a_1, a_2 și a_3, de mai jos, precum și vectorul v ce urmează:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Putem scrie: $v = 2a_1 - 3a_1 + 4a_3$, ceea ce se verifică astfel:

$$2a_1 - 3a_2 + 4a_3 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = v.$$

Rezultă că coordonatele vectorului v, în baza B, sînt egale cu 2, —3 și 4, ținînd seama de ordinea dată a celor trei vectori din bază.

Aceasta înseamnă, evident, că dacă scriem aceeași bază sub forma $B = \{a_3, a_1, a_2\}$, aceeași relație de descompunere se citește sub forma $v = 4a_3 + 2a_1 - 3a_2$, coordonatele lui v fiind 4, 2 și —3 (aceleași, dar scrise în altă ordine, dictată de ordinea celor trei vectori în bază).

Una dintre cele mai folosite baze ale unui spațiu liniar este *baza unitară*, anume cea formată cu toți vectorii unitari ai spațiului respectiv. S-a arătat anterior că sistemul, celor n vectori unitari ai spațiului liniar R^n, este liniar indepdendent, ceea ce înseamnă că într-adevăr acest sistem formează o bază în R^n. Vom nota această bază prin $B_u = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Proprietate importantă: componentele unui vector oarecare din R^n snt egale respectiv cu coordonatele acestui vector în baza unitară. Ilustrăm această proprietate printr-un exemplu numeric. Astfel, să considerăm spațiul liniar R^3, în care bază unitară este $B_u = \{e_1, e_2, e_3\}$, precum și vectorul $v \in R^3$, toți acești vectori avînd formele următoare:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

După cum se știe, 5, —4 și 2 se numesc componentele vectorului $v \in R^3$. Pe de altă parte, dacă scriem descompunerea vectorului v în baza B_u: $v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, x_1, x_2 și x_3 sînt coordonatele vectorului v în baza B_u.

Proprietatea enunțată mai sus precizează că aceste coordonate sînt respectiv egale cu componentele 5, —4 și 2,

Scanned with OKEN Scanner

adică $x_1 = 5$, $x_2 = -4$ și $x_3 = 2$. Această afirmație se verifică ușor, efectuînd calculele:

$$5e_1 - 4e_2 + 2e_3 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = v.$$

Propunem acum cititorului să vadă, în spatele calculelor particulare, efectuate mai sus, generalitatea lor, pentru orice formă a vectorului v și pentru orice dimensiune a spațiului. După cum se observă, primul vector unitar selectează prima componentă a vectorului v, al doilea vector unitar selectează cea de a doua componentă, ș.a.m.d.

Se obișnuiește ca, atunci cînd mai mulți vectori ai unui spațiu sînt exprimați într-o aceeași bază, coordonatele lor să se așeze într-o schemă de felul celei care se dă ca exemplu în tabelul II.1.1.

Tabelul II.1.1.:

Baza	v_1	v_2	v_3
a_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
a_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}
a_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}

În această schemă, baza fiind formată din vectorii a_1, a_2 și a_3, în această ordine, coordonatele vectorului v_1 sînt x_{11}, x_{21} și x_{31}, coordonatele vectorului v_2 sînt x_{12}, x_{22} și x_{32}, iar ale vectorului v_3 sînt x_{13}, x_{23} și x_{33}. După cum se vede, în această notație, primul indice al fiecărei coordonate reprezintă rangul acestei coordonate (prima, a doua sau a treia), iar cel de al doilea indice coincide cu indicele vectorului descompus (pe coloana lui v_1 este egal cu unu, pe coloana v_2 este egal cu doi, iar pe coloana lui v_3 este egal cu trei). De exemplu, x_{23} este cea de a doua coordonată a vectorului v_3. Din schema prezentată se citesc — deci — următoarele descompuneri ale vectorilor v_1, v_2 și v_3:

$$v_1 = x_{11} \cdot a_1 + x_{21} \cdot a_2 + x_{31} \cdot a_3;$$
$$v_2 = x_{12} \cdot a_1 + x_{22} \cdot a_2 + x_{23} \cdot a_3;$$
$$v_3 = x_{13} \cdot a_1 + x_{23} \cdot a_2 + x_{33} \cdot a_3;$$

Scanned with OKEN Scanner

În plus, să observăm că dacă am considera și vectorii a_1, a_2 și a_3, ce formează însăși baza, aceștia s-ar descompune în baza dată astfel:

$$a_1 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3;\ a_2 = 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3;$$
$$a_3 = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 1 \cdot a_3.$$

În acest fel, pentru a scrie descompunerile tuturor vectorilor din R^3, ce apar în acest exemplu, schema ar putea fi completată ca în tabelul II.1.2.

Tabelul II.1.2.:

Baza	v_1	v_2	v_3	a_1	a_2	a_3
a_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	1	0	0
a_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	0	1	0
a_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	0	0	1

Reprezentînd, deci, ca niște coloane, descompunerile unor vectori, în baza $B = \{a_1, a_2, a_3\}$, vectorii a_1, a_2 și a_3 joacă rolul coloanelor unitare ale spațiului R^3, și anume: primul vector scris pe coloana „baza" joacă rolul primei coloane unitare, al doilea vector scris pe aceeași coloană joacă rolul celei de a doua coloane unitare, iar cel de al treilea vector al coloanei „baza" joacă rolul celei de a treia coloane unitare.

Exemplu numeric. În schema tabelului II.1.3. sînt prezentate coordonatele vectorilor v_1 și v_2, în baza $B = \{a_1, a_2, a_3\}$, deci: $v_1 = -2a_1 + a_2 - 3a_3$ și — respectiv — $v_2 = a_2 + 2a_3$.

Tabelul II.1.3.:

Baza	v_1	v_2	a_1	a_2	a_3
a_1	−2	0	1	0	0
a_2	1	1	0	1	0
a_3	−3	2	0	0	1

Se observă că aceeași schemă se poate scrie și altfel, schimbînd ordinea vectorilor din bază. De pildă, punînd $B = \{a_3, a_1, a_2\}$, schema capătă forma din tabelul II.1.4.

Tabelul II.1.4.

Baza	v_1	v_2	a_1	a_2	a_3
a_3	−3	2	0	0	1
a_1	−2	0	1	0	0
a_2	1	1	0	1	0

Scanned with OKEN Scanner

În această schemă, sînt conținute aceleași descompuneri ale vectorilor din capul tabelului, ca și în cea anterioară. De exemplu, de aici citim: $v_1 = -3a_3 - 2a_1 + a_2$, descompunere echivalentă cu cea extrasă din schema precedentă.

Observăm, în plus, că numerele din această schemă au fost obținute din cele ale schemei anterioare, mutînd cea de a treia linie pe primul loc, împreună cu simbolul a_3, din dreptul acestei linii.

Ne propunem, în cele ce urmează, să deducem o regulă practică, cu ajutorul căreia să putem recalcula coordonatele unui vector oarecare, cînd se înlocuiește un vector din bază, cu un alt vector al spațiului în care se lucrează. Deși, pentru simplitatea scrierii și urmăririi demonstrației, vom scoate această regulă folosind vectori din spațiul liniar R^3, cititorul poate observa că regula este generală, putînd relua cu ușurință demonstrația și pe cazul unui spațiu R^n oarecare.

O altă simplificare, pe care o vom face în același scop, este aceea că vom nota coordonatele vectorilor descompuși inițial cu un singur indice, dar schimbînd litera folosită. Urmărind să recalculăm coordonatele la doi vectori deodată, să considerăm vectorii a_1, a_2, a_3, a_4, v_1 și v_2, exprimați toți în baza $B = \{a_1, a_2, a_3\}$, ca în tabelul II.1.5.

Tabelul II.1.5.:

Baza	a_1	a_2	a_3	a_4	v_1	v_2
a_1	1	0	0	α_1	x_1	y_1
$\leftarrow a_2$	0	1	0	α_2	x_2	y_2
a_3	0	0	1	$\alpha_3\uparrow$	x_3	y_3

Să presupunem în plus că vrem să exprimăm toți vectorii din acest tabel în baza $B = \{a_1, a_4, a_3\}$, obținută din baza B, prin înlocuirea vectorului a_2 cu vectorul a_4. După cum vedem, s-a păstrat ordinea veche a vectorilor din bază, vectorul a_4 intrînd strict în locul lui a_2, pe poziția a doua. Această modificare s-a indicat pe tabel (așa cum se face de obicei) prin două săgeți, și anume: una în dreptul simbolului a_2 din coloana „baza", care indică faptul că vectorul a_2 iese din bază (se elimină din bază), iar alta în dreptul coloanei ce conține coordonatele vectorului a_4, săgeată care indică faptul că acest vector intră (se introduce) în bază. Elementul (coordonata) α_2 care se găsește la intersecția liniei cu săgeată (a doua linie) și coloanei cu săgeată (coloana a_4), se numește *pivot* și este încercuit în tabel, deoarece joacă, după cum se vom vedea, un rol important în regula pe care o vom deduce.

Scanned with OKEN Scanner

Din tabel se pot extrage următoarele descompuneri, ale vectorilor a_4, v_1 și v_2:

$$a_4 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3;$$
$$v_1 = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3;$$
$$v_2 = y_1 a_1 + y_2 a_2 + y_3 a_3;$$

Presupunînd că $\alpha_2 \neq 0$ (condiție esențială ca rezolvarea problemei să fie posibilă), din prima descompunere scoatem:

$$a_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot a_1 + \frac{1}{\alpha_2} \cdot a_4 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \cdot a_3.$$

Aceasta este și exprimarea vectorului α_2, în baza nouă, B', noile coordonate ale lui α_2 fiind $(-\alpha_1/\alpha_2)$, $(1/\alpha_2)$ și $(-\alpha_3/\alpha_2)$. Înlocuind pe α_2 cu expresia găsită, în vechile descompuneri ale lui v_1 și v_2 și efectuînd calculele, obținem:

$$v_1 = x_1 a_1 + x_2 \cdot \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} a_1 + \frac{1}{\alpha_2} a_4 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} a_3\right) + x_3 a_3 =$$

$$= \frac{x_1\alpha_2 - x_2\alpha_1}{\alpha_2} \cdot a_1 + \frac{x_2}{\alpha_2} \cdot a_4 + \frac{x_3\alpha_2 - x_2\alpha_3}{\alpha_2} \cdot a_3,$$

$$v_2 = y_1 a_1 + y_2 \cdot \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} a_1 + \frac{1}{\alpha_2} a_4 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} a_3\right) + y_3 a_3 =$$

$$= \frac{y_1\alpha_2 - y_2\alpha_1}{\alpha_2} a_1 + \frac{y_2}{\alpha_2} a_4 + \frac{y_3\alpha_2 - y_2\alpha_3}{\alpha_2} a_3.$$

Putem completa — deci — vechiul tabel, S, cu un altul, S', pe care îl vom construi sub el și în care toți vectorii sînt descompuși în noua bază, B', ca în tabelul II.1.6.

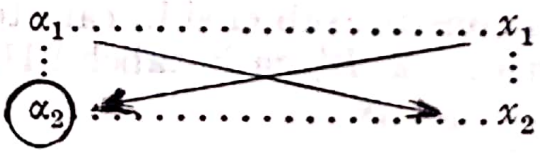
Tabelul II.1.6.:

Baza	a_1	a_2	a_3	a_4	v_1	v_2	
a_1	1	0	0	α_1	x_1	y_1	
$\leftarrow a_2$	0	1	0	$\alpha_2 \uparrow$	x_2	y_2	(S)
a_3	0	0	1	α_3	x_3	y_3	
a_1	1	$-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$	0	0	$\frac{x_1\alpha_2 - x_2\alpha_1}{\alpha_2}$	$\frac{y_1\alpha_2 - y_2\alpha_1}{\alpha_2}$	
a_4	0	$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$	0	1	$\frac{x_2}{\alpha_2}$	$\frac{y_2}{\alpha_2}$	(S')
a_3	0	$-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}$	1	0	$\frac{x_2\alpha_3 - x_2\alpha_3}{\alpha_2}$	$\frac{y_3\alpha_2 - y_2\alpha_3}{\alpha_2}$	

Scanned with OKEN Scanner

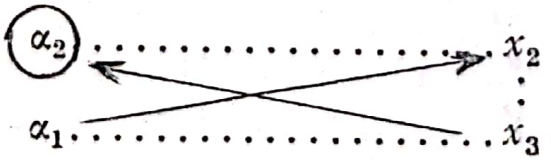
Observație. În noua schemă, S', coloanele a_1, a_4 și a_2 sînt coloane unitare, acești vectori formînd baza. Mai precis, deoarece a_1 este primul scris pe coloana „baza", a_1 este prima coloană unitară (cu componenta egală cu unu pe prima poziție); deoarece a_4 este scris al doilea pe coloana „baza", noua descompunere a lui a_4 este reprezentată de cea de a doua coloană unitară; deoarece a_3 este al treilea vector scris pe coloana „baza", descompunerea lui a_3 este reprezentată prin a treia coloană unitară.

Cercetînd cu atenție secțiunile S și S', ale tabelului de mai sus, observăm o regulă practică, cu ajutorul căreia se pot obține direct valorile din S', pe baza celor din S. Mai întîi, să observăm că linia a doua din S' (linia vectorului a_4) se poate obține direct din linia a doua a lui S (linia pivotului), împărțind toate elementele sale prin pivotul α_2. În plus, coloanele a_1, a_4, și a_2 se pot completa direct, așa cum s-a arătat în observația de mai sus. În ceea ce privește celelalte elemente (locurile rămase necompletate, după aplicarea operațiilor indicate mai sus), acestea se pot calcula direct cu așa numita *regulă a dreptunghiului*, pe care o prezentăm în continuare. Să considerăm, de pildă, prima coordonată nouă, a vectorului v_1, egală cu $(x_1\alpha_2 - x_2\alpha_1)/\alpha_2$; ea poate fi calculată în mod direct, prin aplicarea anumitor operații asupra unor elemente din schema veche, ce se găsesc în vîrfurile unui dreptunghi, imaginat astfel încît două vîrfuri ale lui să se găsească în coordonata corespunzătoare veche (x_1) și pivot (α_2). Acest dreptunghi are forma următoare:



Vom face mai întîi produsul elementelor de pe diagonala pivotului, adică produsul $x_1\alpha_2$. Apoi, vom face produsul elementelor de pe cealaltă diagonală, adică produsul $x_1\alpha_2$. În sfîrșit, scădem cele două rezultate, în ordinea strictă a calculării lor și împărțim diferența la pivot, ceea ce conduce la noua coordonată, ce va lua locul lui x_1 în noua schemă. Să verificăm regula și pentru cea de a treia coordonată nouă, a vectorului v_1, adică $(x_3\alpha_2 - x_2\alpha_3)/\alpha_2$.

Dreptunghiul corespunzător se imaginează astfel:

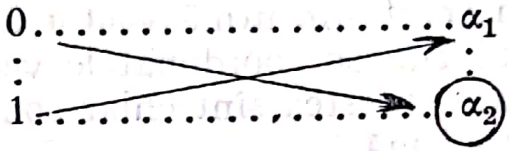


Scanned with OKEN Scanner

Primul produs (pe diagonala pivotului): $x_3\alpha_2$.

Cel de al doilea produs (pe cealaltă diagonală): $x_2\alpha_3$.

A treia coordonată nouă, a vectorului v_1, ce va lua locul lui x_3, se află împărțind diferența $x_3\alpha_2 - x_2\alpha_3$, la pivotul α_2, ceea ce conduce într-adevăr la expresia din S'. În sfîrșit, să verificăm că aceeași regulă se aplică și pentru aflarea noilor coordonate ale vectorului a_2. Astfel, prima coordonată nouă, a acestui vector, egală cu $(-\alpha_1/\alpha_2)$, se poate calcula direct, imaginîndu-se următorul dreptunghi:



Primul produs: $0 \cdot \alpha_2 = 0$.

Cel de al doilea produs: $1 \cdot \alpha_1 = \alpha$.

Va trebui — deci să împărțim diferența $0-\alpha_1=-\alpha_1$, prin pivotul α_2, ceea ce conduce într-adevăr la $(-\alpha_1/\alpha_2)$. Propunem cititorului să verifice, în mod asemănător, și celelalte valori din S'.

Atenție! În aplicarea regulii dreptunghiului este esențială păstrarea ordinii la efectuarea diferenței, și anume: *(produs elemente de pe diagonala pivotului) — (produs elemente de pe cealaltă diagonală).*

De asemenea, să nu se uite ca — în final — să se împartă diferența la pivot!

Încheiem prezentarea regulii, prin enumerarea operațiilor ce trebuie aplicate, în vederea rezolvării problemei puse:

(a) Se determină pivotul (la intersecția coloanei vectorului ce intră în bază cu linia vectorului ce iese din bază).
(b) Se completează coloana „baza".
(c) Se împarte *toată* linia pivot la pivot.
(d) Se completează coloanele corespunzătoare vectorilor din noua bază, ca niște coloane unitare.
(e) Celelalte elemente se calculează cu regula dreptunghiului.

Observații. 1. Orice coloană, care are un element egal cu zero pe linia pivotului, se păstrează neschimbată, de la S la S'. În particular, coloanele vectorilor care sînt comuni bazelor B și B' rămîn coloane unitare.

2. Orice linie, care are un element egal cu zero pe coloana pivotului, se păstrează neschimbată de la S la S'.

3. Regula prezentată, de recalculare a coordonatelor unui vector, atunci cînd se înlocuiește un vector al bazei cu un vector oarecare, a fost justificată pentru doi vectori deodată

Scanned with OKEN Scanner

(v_1 și v_2). Evident, ea poate fi aplicată și numai pentru un singur vector (caz în care nu se mai trece în tabel fie coloana v_2, fie coloana v_1), precum și pentru mai mulți vectori deodată. De altfel, aplicarea aceleiași reguli arată cum se exprimă în noua bază și vechile coloane unitare.

Pornind de la regula de mai sus, se poate deduce o metodă de descompunere a unui vector (sau mai mulți vectori deodată) într-o bază dată, numită *metoda Gauss — Jordan*. Astfel, păstrîndu-ne pentru exemplificare în spațiul R^3, dacă se dă o bază $B = \{a_1, a_2, a_3\}$ și un vector $b = (b_1, b_2, b_3)^t$, pentru a exprima acest din urmă vector în baza B, pornim de la faptul că se cunosc coordonatele vectorilor a_1, a_2, a_3 și b în baza unitară; acestea sînt chiar componentele vectorilor, date de problemă.

Vom porni deci calculul, de la schema din tabelul II.1.7.

Tabelul II.1.7.:

Baza	a_1	a_2	a_3	b	e_1	e_2	e_3	
e_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	b_1	1	0	0	
e_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	b_2	0	1	0	(S_0)
e_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	b_3	0	0	1	

Aici, vom înlocui succesiv (în trei iterații), conform regulii prezentate, cei trei vectori unitari ce formează baza inițială, cu vectorii a_1, a_2 și a_3, dacă se poate chiar în această ordine (ceea ce nu este obligatoriu). Cititorul poate observa că problema se rezolvă în mod asemănător, pentru orice dimensiune a spațiului.

Exemplul 1. Fie baza $B = \{a_1, a_2, a_3\}$, precum și vectorul b, toate din spațiul R^3, unde:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Pentru a descompune vectorul b în baza B, completăm mai întîi secțiunea S_0 a tabelului II.1.8., după care efectuăm trei iterații, pentru înlocuirea vectorului e_1, e_2 și e_3, prin a_1, a_2 și a_3.

Din secțiunea s_3 a tabelului, se citesc pe coloana b, cele trei coordonate ale vectorului b în baza formată de vectorii a_1, a_2 și a_3 (scrișI în această ordine pe coloana „baza"): 2, —5 și 1. S-a obținut, deci, următoarea descompunere: $b = 2a_1 - 5a_2 + a_3$.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul II.1.8.:

Baza	a_1	a_2	a_3	b	e_1	e_2	e_3	
$\leftarrow e_1$	1	1	1	−2	1	0	0	
e_2	3	2	1	−3	0	1	0	(S_0)
e_3	1↑	0	1	3	0	0	1	
a_1	1	1	1	−2	1	0	0	
$\leftarrow e_2$	0	−1	−2	3	−3	1	0	(S_1)
e_3	0	−1↑	0	5	1	0	1	
a_1	1	0	−1	1	−2	1	0	
a_2	0	1	2	−3	3	−1	0	(S_2)
$\leftarrow e_3$	0	0	2↑	2	2	−1	1	
a_1	1	0	0	2	−1	1/2	1/2	
a_2	0	1	0	−5	1	0	−1	(S_3)
a_3	0	0	1	1	1	−1/2	1/2	

După cum se vede din tabel, pivoții au fost aleşi succesiv, astfel încît vectorii a_1, a_2 şi a_3 să înlocuiască în bază pe rînd, respectiv vectorii e_1, e_2 şi e_3.

Acest lucru a fost posibil, pentru că niciodată nu am fost conduşi să alegem ca pivot un element egal cu zero. Dacă această situaţie ar apărea, evident că am renunţa la ordinea de mai sus, ordinea vectorilor a_1, a_2 şi a_3, în baza finală, fiind neesenţială. În acest sens dăm un exemplu adecvat.

Exemplul 2. Cu aceleaşi notaţii ca la exemplul 1, avem:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Calculele de rezolvare a problemei sînt conţinute în tabelul II.1.9, pe care îl comentăm în continuare.

Tabelul II.1.9.

Baza	a_1	a_2	a_3	b	e_1	e_2	e_3	
$\leftarrow e_1$	$\boxed{1}$	3	2	3	1	0	0	
e_2	2	6	3	8	0	1	0	(S_0)
e_3	1↑	0	1	−4	0	0	1	
a_1	1	3	2	3	1	0	0	
$\leftarrow e_2$	0*	0*	$\boxed{-1}$	2	−2	1	0	(S_1)
e_3	0	−3	−1↑	−7	−1	0	1	
a_1	1	3	0	7	−3	2	0	
a_3	0	0	1	−2	2	−1	0	(S_2)
$\leftarrow e_3$	0	$\boxed{-3}$↑	0	−9	1	−1	1	
a_1	1	0	0	−2	−2	1	1	
a_3	0	0	1	−2	2	−1	0	(S_3)
a_2	0	1	0	3	−1/3	1/3	−1/3	

Scanned with OKEN Scanner

După cum se vede, la iterația a doua nu s-a putut introduce în bază vectorul a_2 în locul vectorului e_2, deoarece pentru alegerea pivotului am fi fost conduși la un element egal cu zero (marcat printr-un asterisc în secțiunea S_1). De aceea, s-a introdus în bază, la această iterație, vectorul a_3 în locul vectorului e_2. În final, secțiunea S_3 conține vectorii bazei B, în ordinea a_1, a_3, a_2, ceea ce înseamnă că coordonatele -2, -2, 3, obținute pentru descompunerea vectorului b, trebuie folosite pentru scrierea reprezentării astfel:

$b = -2a_1 - 2a_3 + 3a_2$ (adică $x_1 = -2$, $x_3 = -2$ și $x_2 = 3$ în forma generală a acestei exprimări).

Observații. 1. Schimbarea ordinii de introducere a vectorilor a_1, a_2 și a_3 în bază se poate face și pentru simplificarea calculelor, prin folosirea unor pivoți mai ușor de mînuit. Astfel, deoarece calculele cu fracții sînt greoaie, preferăm uneori pivoți egali cu $+1$ sau cu -1.

2. Dacă, la o amintită iterație, nu există nici o posibilitate de înlocuire a unui vector e_i, rămas în baza curentă, printr-un vector propus de problemă (a_1, a_2 sau a_3), toate încercările conducînd la un pivot egal cu zero, înseamnă că cei trei vectori dați de problemă, a_1, a_2 și a_3, nu formează o bază în R^3 și problema pusă nu se poate rezolva.

O altă interpretare a metodei Gauss-Jordan, aplicată mai sus, este legată de rezolvarea unui sistem de ecuații liniare de tip Cramer. Vom prezenta această interpretare pe baza unui esemplu numeric, cititorul fiind rugat să vadă generalitatea raționamentului. Folosim, în cele ce urmează, datele numerice ale exemplului 1 de mai sus. Se știe că exprimarea vectorului b, în baza $B = \{a_1, a_2, a_3\}$, are forma următoare:

$$b = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3,$$

unde coordonatele x_1, x_2 și x_3 sînt necunoscute. Sîntem — deci — în fața unei ecuații vectoriale, echivalente, după cum vom vedea, cu un sistem de ecuații liniare. Într-adevăr, înlocuind vectorii din această egalitate pe componente, ecuația devine:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Efectuarea calculelor, din partea dreaptă, se face după cum urmează:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 3x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

deci:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}.$$

Pentru ca cei doi vectori, din ultima relație, să fie egali, este necesar și suficient ca ei să aibă componentele respectiv egale, ceea ce înseamnă că coordonatele necunoscutelor x_1, x_2 și x_3 formează soluția următorului sistem de trei ecuații liniare cu trei necunoscute:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -3, \\ x_1 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Se știe că matricea acestui sistem are drept coloane vectorii a_1, a_2 și a_3, ce formează baza B, ceea ce asigură că determinantul sistemului este nenul, deci că sistemul este compatibil și unic determinat.

Rezolvînd acest sistem, obținem valorile $x_1 = 2$, $x_2 = -5$ și $x_3 = 1$, care coincid cu cele obținute prin metoda Gauss-Jordan. În consecință, aplicarea metodei Gauss-Jordan, pentru exprimarea unui vector într-o bază, este echivalentă cu rezolvarea unui sistem de ecuații liniare, compatibil și unic determinat. Notînd cu A matricea sistemului, cu b coloana termenilor liberi și cu X soluția sistemului (de asemenea un vector coloană), se știe că întreg sistemul se poate scrie sub următoarea formă matricială: $AX = b$. Rezolvarea acestui sistem este echivalentă, așa cum s-a arătat, cu exprimarea vectorului b (al termenilor liberi), în baza formată de coloanele matricei A. Aplicarea metodei Gauss-Jordan se simbolizează prin schema din tabelul II.1.10, trecerea de la secțiunea S_0 la secțiunea S_3 făcîndu-se în trei iterații, conform regulilor prezentate. Faptul că în secțiunea S_3, în dreptul matricei unitare inițiale, E, apare matricea

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul II.1.10.:

Baza	a_1	a_2	a_3	b	e_1	e_2	e_3	
B_u	A			b	E			
.....	.....			....	.....			(S_0)
B	E			X	A^{-1}			(S_4)

inversă A^{-1}, se justifică ţinînd seama de relaţia de definiţie a matricei inverse, şi anume:

$$AA^{-1} = E.$$

Astfel, să notăm elementele matricei A^{-1} ca mai jos (ele fiind deocamdată necunoscute):

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} y_1 & z_1 & t_1 \\ y_2 & z_2 & t_2 \\ y_3 & z_3 & t_3 \end{pmatrix}.$$

Cu aceste notaţii şi folosind reprezentarea vectorială a coloanelor din matricele A şi E, relaţia $AA^{-1} = E$ se scrie astfel:

$$(a_1 \quad a_2 \quad a_3)\begin{pmatrix} y_1 & z_1 & t_1 \\ y_2 & z_2 & t_2 \\ y_3 & z_3 & t_3 \end{pmatrix} = (e_1 \quad e_2 \quad e_3).$$

De aici rezultă sistemul următoarelor trei ecuaţii vectoriale:

$$\begin{cases} y_1a_1 + y_2a_2 + y_3a_3 = e_1, \\ z_1a_1 + z_2a_2 + z_3a_3 = e_2, \\ t_1a_1 + t_2a_2 + t_3a_3 = e_3. \end{cases}$$

Interpretînd separat aceste trei ecuaţii, asemănător cu ecuaţia vectorială echivalentă cu sistemul rezolvat, deducem că:

— prima coloană a matricei A^{-1}, de forma $(y_1, y_2, y_3)^t$, conţine coordonatele vectorului e_1 (prima coloană a matricei E), în baza $B = \{a_1, a_2, a_3\}$;

— a doua coloană a matricei A^{-1}, $(z_1, z_2, z_3)^t$, conţine coordonatele vectorului e_2 în baza B;

— a treia coloană a matricei A^{-1}, $(t_1, t_2\ t_3)^t$, conţine coordonatele vectorului e_3 în baza B.

Scanned with OKEN Scanner

Aceste interpretări justifică pe deplin afirmația făcută, că în secțiunea S_3 a tabelului II.1.10, în dreptul matricei unitate inițiale, se obține A^{-1}, inversa matricei sistemului rezolvat.

Observații. 1. Metoda Gauss-Jordan se poate aplica și la exprimarea mai multor vectori deodată, într-o bază dată, ceea ce este echivalent cu rezolvarea simultană a mai multe sisteme de ecuații liniare, care au toate aceeași matrice A.

2. Fiecărei secțiuni, a tabelului de rezolvare, îi corespunde cîte o matrice inversă în dreptul matricei E inițiale, și anume, inversa acelei matrice ale cărei coloane sînt vectorii ce formează baza corespunzătoare secțiunii respective (păstrînd ordinea acestor vectori). Astfel, de pildă, în exemplul 1, de mai sus, pentru secțiunea S_2 avem:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ unde: } M = \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Important! Metodă de verificare a calculelor. După cum se știe, soluția X a ecuației matriciale $AX = b$, cu matricea A pătrată nesingulară, se poate calcula cu formula: $X = A^{-1}b$.

Această formulă se poate folosi, după aplicarea metodei Gauss-Jordan, pentru verificarea calculelor. De pildă, pentru exemplul 1 de mai sus, cititorul poate verifica exactitatea calculelor, prin egalitatea:

$$A^{-1}b = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = X.$$

Observăm că vectorul X, ce dă descompunerea vectorului b, în baza B, reprezintă forma finală (în ultima secțiune din tabel) a coloanei b. Deoarece secțiunea finală conține descompunerile tuturor vectorilor din tabel, în baza B (nu numai a vectorului b), metoda de verificare poate fi aplicată pentru fiecare în parte. Astfel, dacă notăm cu $\bar{a}_j$ coloana ce conține coordonatele unui vector a_j în baza B (ultima formă a coloanei a_j), verificăm această coloană cu formula:

$$\bar{a}_j = A^{-1}a_j, \; j = 1, \; 2, \; 3.$$

De asemenea, corespunzător unui vector e_j, avem:

$$\bar{e}_j = A^{-1}e_j$$

Scanned with OKEN Scanner

unde e_j este forma finală a coloanei e_j. De pildă, în exemplul 1, coloanele a_2 și e_2, din secțiunea S_3, se pot verifica astfel:

$$A^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{a}_2$$

$$A^{-1}e_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \bar{e}_2$$

Observații. 1. Formulele de verificare a calculelor pot fi folosite și pentru o secțiune intermediară, considerînd-o pe acesta ca „ultima". De pildă, în exemplul 1, de mai sus, coloana a_3, din secțiunea S_2, se verifică astfel:

$$M^{-1}a_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

unde matricea M este cea ale cărei coloane sînt vectorii a_1, a_2 și e_3.

2. Dacă în rezolvarea unui sistem liniar de tip Cramer nu se urmărește verificarea calculelor, în tabel nu se mai trec coloanele corespunzătoare vectorilor unitari. De asemenea, atunci cînd se urmărește calcularea inversei unei matrici A, nu mai apare coloana b.

Probleme rezolvate

1. Fie vectorii:

$V_1 = (2 \quad -1 \quad 1 \quad 3)^t$; $V_2 = (1 \quad -2 \quad -3 \quad 0)^t$;
$V_3 = (1 \quad 0 \quad -1 \quad 2)^t$; $V_4 = (0 \quad 3 \quad 2 \quad -1)^t$;

Să se calculeze următoarele combinații liniare are lor:

a. $W_1 \equiv 2V_1 + 3V_2 - V_3 + 4V_4$;

b. $W_2 \equiv \frac{1}{2}V_1 - \frac{1}{2}V_2 + V_3$;

c. $W_3 \equiv \frac{1}{5}V_1 + \frac{2}{5}V_2 + \frac{1}{5}V_3 + \frac{1}{5}V_4$;

d. $W_4 \equiv \frac{1}{3}V_1 + \frac{1}{3}V_2 + \frac{2}{3}V_3$.

Scanned with OKEN Scanner

Care dintre aceste combinații sînt convexe?

Rezolvare: Avem calculele:

a. $W_1 = 2(2\ -1\ 1\ 3)^t + 3(1\ -2\ -3\ 0)^t - (1\ 0\ -1\ 2)^t +$

$+ 4(0\ 3\ 2\ -1)^t = (4\ -2\ 2\ 6)^t + (3\ -6\ -9\ 0) +$

$+ (-1\ 0\ 1\ -2)^t + (0\ 12\ 8\ -4)^t = (6\ 4\ 2\ 0)^t.$

b. $W_2 = \frac{1}{2}(2\ -1\ 1\ 3)^t - \frac{1}{2}(1\ -2\ -3\ 0)^t +$

$+ (1\ 0\ -1\ 2)^t = \left(1\ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\right)^t + \left(-\frac{1}{2}\ 1\ \frac{3}{2}\ 0\right)^t +$

$+ (1\ 0\ -1\ 2)^t = \left(\frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\ 1\ \frac{7}{2}\right)^t.$

c. $W_3 = \frac{1}{5}(2\ -1\ 1\ 3)^t + \frac{2}{5}(1\ -2\ -3\ 0)^t +$

$+ \frac{1}{5}(1\ 0\ -1\ 2)^t + \frac{1}{5}(0\ 3\ 2\ -1)^t = \left(\frac{2}{5}\ -\frac{1}{5}\ \frac{1}{5}\ \frac{3}{5}\right)^t +$

$+ \left(\frac{2}{5}\ -\frac{4}{5}\ -\frac{6}{5}\ 0\right)^t + \left(\frac{1}{5}\ 0\ -\frac{1}{5}\ \frac{2}{5}\right)^t +$

$+ \left(0\ \frac{3}{5}\ \frac{2}{5}\ -\frac{1}{5}\right)^t = \left(1\ -\frac{2}{5}\ -\frac{4}{5}\ \frac{4}{5}\right).$

d. $W_4 = \frac{1}{3}(2\ -1\ 1\ 3^t) + \frac{1}{3}(1\ -2\ -3\ 0) +$

$+ \frac{2}{3}(0\ 3\ 2\ -1)^t = \left(\frac{2}{3}\ -\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ 1\right)^t + \left(\frac{1}{3}\ -\frac{2}{3}\ -1\ 0\right)^t +$

$+ \left(0\ 2\ \frac{4}{3}\ -\frac{2}{3}\right)^t = \left(1\ 1\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{3}\right)^t.$

Singura combinație liniară convexă este reprezentată de W_3, deoarece ea are toți scalarii nenegativi, iar suma acestor scalari este egală cu unu.

Scanned with OKEN Scanner

2. Fie următorii trei vectori, din R^4:

$$a_1 = (6 \quad 3 \quad 2 \quad 1)^t;$$
$$a_2 = (2 \quad 1 \quad 2 \quad -1)^t;$$
$$a_3 = (2 \quad 1 \quad -1 \quad 2)^t.$$

a. Să se cerceteze dacă sistemul $S = \{a_1, a_2, a_3\}$ este liniar dependent sau liniar independent.

b. În caz de dependență, să se scrie o relație de dependență liniară, între vectorii dați. Cîte astfel de relații distincte există?

c. Se poate exprima vectorul a_1, ca o combinație liniară a celorlalți doi și cum anume? Este aceasta o combinație liniară convexă, a vectorilor a_2 și a_3?

Rezolvare. a. Aplicăm regula practică, menționată în text, pentru cercetarea dependenței sau independenței liniare a unui sistem de vectori. Matricea A — ale cărei componente sînt vectorii sistemului — este următoarea:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pentru a calcula rangul acestei matrice, pornim de la un determinant minor de ordinul doi, diferit de zero. Deoarece cel din colțul stînga — sus este nul, îl considerăm pe următorul:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0.$$

Bordînd acest minor, în toate felurile posibile, cu cîte o linie și o coloană, din cele nefolosite (cu linia a doua și coloana a treia, respectiv, cu linia a patra și coloana a treia) obținem determinanții:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & -1 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad D_3 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Deoarece toți acești minori obținuți prin bordare, sînt nuli, rangul matricei A rămîne egal cu doi, el fiind egal cu

Scanned with OKEN Scanner

ordinul determinantului D_1, ce poate fi considerat ca determinant principal. Cum rangul găsit este mai mic decît numărul vectorilor, sistemul S este liniar dependent.

b. Relația de dependență liniară avînd forma generală:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0;$$

valorile scalarilor λ_1, λ_2 și λ_3 se determină prin revolvarea sistemului de ecuații liniare (cu forma matricială $A\lambda = 0$):

$$\begin{cases} 6\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_2 = 0, \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Considerînd pe D_1 ca determinant principal, ecuațiile principale sînt prima și a treia, iar necunoscutele principale sînt λ_1 și λ_2. Dînd lui λ_3 valoarea unu, rămîne — deci — să rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} 6\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2 = 0. \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Avem: $\lambda_1 = -3/4$ și $\lambda_2 = 5/4$.

Deci $-3/4a_1 + 5/4a_2 + a_3 = 0$.

Există o singură relație de dependență liniară. Pentru $\lambda_3 = 2$ calculele ar conduce la $\lambda_1 = -\frac{3}{2}$ și $\lambda_2 = \frac{5}{2}$.

În acest caz, relația de dependență ar fi:

$$-\frac{3}{2} a_1 + \frac{5}{2} a_2 + 2a_3 = 0.$$

evident nedistinctă de cea obținută mai sus.

c. Din relația de dependență liniară, obținută mai sus, putem scoate pe a_1, în funcție de a_2 și a_3, deoarece coeficientul lui a_1 este diferit de zero. Obținem, astfel:

$$a_1 = \frac{5}{3} a_2 + \frac{4}{3} a_3.$$

Combinația liniară, din partea dreaptă a acestei egalități, nu este convexă, deoarece suma coeficienților nu este egală cu unu.

Scanned with OKEN Scanner

3. Fie sistemul $S=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, de vectori din R^5, unde:

$$V_1 = (2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)^t;$$
$$V_2 = (3 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 0)^t;$$
$$V_3 = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 2)^t;$$
$$V_4 = (0 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 3)^t.$$

a. Să se cerceteze dependența sau independența liniară a sistemului S.

b. Cîte relații de dependență liniară distincte există între vectorii ce s-au dat și cum pot arăta ele?

Rezolvare. a. Matricea A, ale cărei coloane sînt cei patru vectori, este:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Pentru a găsi rangul acestei matrice pornim de la minorul:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Acest minor trebuie bordat în șase feluri și anume: cu linia a treia și coloana a treia, cu linia a treia și coloana a patra, cu linia a patra și coloana a treia, cu linia a patra și coloana a patra, cu linia a cincea și coloana a treia, cu linia a cincea și coloana a patra. Vor rezulta respectiv următorii determinanți, toți nuli:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad D_5 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_6 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad D_7 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

Rezultă că D_1 poate fi luat ca determinant principal și rangul matricei A este egal cu doi. Fiind vorba despre patru vectori, ei sînt — deci — liniar dependenți.

Scanned with OKEN Scanner

b. Relația de dependență liniară are forma generală:

$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 + \lambda_4 V_4 = 0.$$

Pentru determinarea lui λ_1, λ_2, λ_3 și λ_4, din sistemul $A\lambda = 0$ păstrăm numai primele două ecuații, care sînt principale:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0. \end{cases}$$

În plus, trebuie să dăm valori arbitrare necunoscutelor λ_3 și λ_4, care sînt neprincipale. Vom lua, pentru început, valorile $\lambda_3 = 1$ și $\lambda_4 = 0$, ceea ce conduce la sistemul:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 1 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 1 = 0. \end{cases}$$

cu soluția $\lambda_1 = -2$ și $\lambda_2 = 1$. Obținem, astfel, prima relație de dependență liniară, pe care o notăm cu (R_1):

$$(R_1): -2V_1 + V_2 + V_3 = 0.$$

Pe de altă parte, vom lua valorile $\lambda_3 = 0$ și $\lambda_4 = 1$, ceea ce conduce la sistemul:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 1 = 0. \end{cases}$$

cu soluția $\lambda_1 = -3$ și $\lambda_2 = 2$. În acest fel, obținem a doua relație de dependență liniară, pe care o notăm cu (R_2) și care este — evident — distinctă de prima (nu se poate deduce din ea):

$$(R_2): -3V_1 + 2V_2 + V_4 = 0.$$

Să arătăm că orice altă posibilitate, de rezolvare a sistemului, conduce la o relație de dependență liniară, ce este o consecință a celor două, obținute mai sus. Pentru aceasta, să presupunem că dăm necunoscutelor neprincipale valori arbitrare, $\lambda_3 = \alpha$ și $\lambda_4 = \beta$. Rezultă sistemul:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \alpha = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \alpha + \beta = 0. \end{cases}$$

cu soluția $\lambda_1 = -2\alpha - 3\beta$ și $\lambda_2 = \alpha + 2\beta$. Se obține, astfel, relația de dependență liniară:

$$(-2\alpha - 3\beta)V_1 + (\alpha + 2\beta)V_2 + \alpha V_3 + \beta V_4 = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

care se poate scrie și astfel:

$$\alpha(-2V_1 + V_2 + V_3) + \beta(-3V_1 + 2V_2 + V_4) = 0.$$

Se observă ușor, că această relație se poate obține din (R_1) și (R_2), astfel: înmulțim relația (R_1) cu α, relația (R_2) cu β și adunăm egalitățile obținute. În consecință, există numai două relații de dependență liniară distincte, de exemplu (R_1) și (R_2). Evident, ele pot fi înlocuite cu alte două relații independente, deduse din acestea. De exemplu, ele pot fi înlocuite prin suma și diferența lor:

$$-5V_1 + 3V_2 + V_3 + V_4 = 0 \text{ și } V_1 - V_2 + V_3 - V_4 = 0.$$

4. Ce condiție trebuie să îndeplinească valorile parametrului m, astfel încît următorii trei vectori din R^3 să formeze o bază în acest spațiu?

$$V_1 = (1 \quad 1 \quad 3)^t;$$
$$V_2 = (2 \quad 1 \quad -1)^t;$$
$$V_3 = (1 \quad 2 \quad m)^t.$$

Rezolvare. Condiția necesară și suficientă, ca trei vectori să formeze o bază în R^3, este ca determinantul, ale cărei coloane sînt cei trei vectori, să nu fie nul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & m \end{vmatrix} \neq 0.$$

Calculînd determinantul, se obține condiția $10 - m \neq 0$, adică $m \neq 10$. Deci, pentru orice valoare a parametrului m, cu excepția valorii $m = 10$, cei trei vectori formează o bază în R^3.

5. Fie următorii șapte vectori, din spațiul R^3:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$a_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_6 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a. Să se arate că sistemul $B_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$ reprezintă o bază în R^3 și să se descompună — în această bază — toți vectorii dați.

Scanned with OKEN Scanner

b. Să se arate că sistemul $B_2 = \{a_1, a_2, a_4\}$ reprezintă — de asemenea — o bază în R^3. Cum se pot descompune vectorii dați în această bază, cu cît mai puține calcule?

c. Să se arate că vectorii a_5 și a_6 pot fi exprimați ca niște combinații liniare ale vectorilor a_1 și a_2.

d. Să se arate că cele două exprimări ale vectorului b, în bazele B_1 și B_2, sînt cazuri particulare ale următoarei ecuații vectoriale:

$$x_1 y_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 + x_5 a_5 + x_6 a_6 = b.$$

Această ecuație este echivalentă cu un sistem de trei ecuații liniare, cu șase necunoscute. Să se scrie acest sistem.

Rezolvare. a. Vectorii ce formează sistemul B_1 formează o bază în R^3, ceea ce se verifică prin calcularea următorului determinant:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Fiind date componentele vectorilor, ce coincid cu coordonatele lor în baza unitară $B_u = \{e_1, e_2, e_3\}$, se poate începe aplicarea metodei Gauss-Jordan, ca în tabelul II.1.11., pe care îl comentăm în cele ce urmează.

Tabelul II.1.11.

Baza	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b	e_1	e_2	e_3	
$\leftarrow e_1$	[1]	3	2	2	4	5	−1	1	0	0	
e_2	2	1	3	0	2	5	7	0	1	0	(S_0)
e_3	1	1	2	0	3	3	3	0	0	1	
a_1	1	3	2	2	4	5	−1	1	0	0	
$\leftarrow e_2$	0	−5	[−1]	−4	−5	−5	9	−2	1	0	(S_1)
e_3	0	−2	0↑	−2	−2	−2	4	−1	0	1	
a_1	1	−7	0	−6	−6	−5	17	−3	2	0	
a_3	0	5	1	4	5	5	−9	2	−1	0	(S_2)
$\leftarrow e_3$	0	[−2]↑	0	−2	−2	−2	4	−1	0	1	
a_1	1	0	0	1	1	2	3	1/2	2	−7/2	
$\leftarrow a_3$	0	0	1	[−1]	0	0	1	−1/2	−1	5/2	(S_3)
a_2	0	1	0	1↑	1	1	−2	1/2	0	−1/2	
a_1	1	0	1	0	1	2	4	0	1	−1	
a_4	0	0	−1	1	0	0	−1	1/2	1	−5/2	(S_4)
a_2	0	1	1	0	1	1	−1	0	−1	2	

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, secțiunea (S_0) conține descompunerile vectorilor în baza unitară. După introducerea în bază a vectorului a_1, în locul vectorului e_1, s-au obținut — în secțiunea S_1 — descompunerile vectorilor în baza intermediară $\{a_1, e_2, e_3\}$. Deoarece introducerea — în continure — a vectorului a_2 în locul lui e_2, ar cere ca pivot pe —5, ducînd la rezultate cu fracții; acest lucru s-a evitat introducînd în cea de a doua iterație pe a_3 în bază, în locul lui e_2 (pivotul —1 este mai ușor de folosit și nu duce la rezultate fracționare). În acest fel, se obține secțiunea S_2, în care toți vectorii sînt descompuși în baza $\{a_1, a_3, e_3\}$. În sfîrșit, introducînd în bază pe a_2 — în locul lui e_3 — se obține secțiunea S_3, care conține coordonatele tuturor vectorilor dați, în baza B_1. De aici, citim:

$$a_1 = a_1; \quad a_2 = a_2; \quad a_3 = a_3; \quad a_4 = a_1 - a_3 + a_2;$$

$$a_5 = a_1 + a_2; \quad a_6 = 2a_1 + a_2; \quad b = 3a_1 + a_3 - 2a_2;$$

Verificarea secțiunii S_3 se poate face folosind matricea încadrată în această secțiune. Să notăm cu B_1 matricea ale cărei coloane sînt vectorii a_1, a_3 și a_2 (în ordinea în care acești vectori sînt scriși în baza secțiunii respective):

$$B_1 = \begin{matrix} \underline{a_1 \quad a_3 \quad a_2} \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matricea încadrată în secțiunea S_3 este inversa acestei matrice, adică:

$$B_1^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & 2 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{Vmatrix}.$$

Înmulțind această matrice inversă cu oricare din vectorii conținuți în secțiunea S_0, obținem forma din secțiunea S_3 a vectorului corespunzător. De exemplu, pentru vectorul a_4 avem:

$$B_1^{-1} a_4 = \begin{pmatrix} 1/2 & 2 & -7/2 \\ -1/2 & -1 & 5/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{a}_4.$$

Scanned with OKEN Scanner

Observație. — Faptul că am notat cu B_i atît baza secțiunii, cît și matricea ale cărei coloane sînt vectorii acestei baze, nu trebuie să deruteze, sensul folosirii acestui simbol rezultînd ușor din context.

b) Avem:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

deci B_2 este — de asemenea — o bază în R^3. Nu este necesar să reluăm efectuarea calculelor de la început, deoarece baza secțiunii S_3 conține doi dintre vectorii bazei B_2. Este deci suficient ca, pornind de aici, să introducem în bază vectorul a_4, în locul vectorului a_3. Acest lucru este realizat în tabel, conducînd la secțiunea S_4. De aici, se pot citi descompunerile:

$$a_1 = a_1; \quad a_2 = a_2; \quad a_3 = a_1 - a_4 + a_2; \quad a_4 = a_4;$$

$$a_5 = a_1 + a_2; \quad a_6 = 2a_1 + a_2; \quad b = 4a_1 - a_4 - a_2.$$

c). Atît din secțiunea S_3, cît și din S_4, s-au obținut relațiile:

$$a_5 = a_1 + a_2; \quad a_6 = 2a_1 + a_2,$$

ceea ce justifică afirmația problemei. De aici, rezultă că sistemele de vectori $\{a_1, a_2, a_5\}$ și $\{a_1, a_2, a_6\}$ sînt liniar dependente.

d) S-a obținut întîi descompunerea:

$$b = 3a_1 - 2a_2 + a_3,$$

ceea ce se încadrează în soluția următoare a ecuației date:

$$x_1 = 3; \; x_2 = -2; \; x_3 = 1; \; x_4 = x_5 = x_6 = 0$$

Cea de a doua descompunere este:

$$b = 4a_1 - a_2 - a_4,$$

ceea ce corespunde cu soluția următoare a ecuației date:

$$x_1 = 4; \; x_2 = -1; \; x_3 = 0; \quad x_4 = -1; \quad x_5 = x_6 = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind vectorii a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 și b — în ecuația vectorială — aceasta devine:

$$x_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+$$

$$+x_5\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}+x_6\begin{pmatrix}5\\5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\7\\3\end{pmatrix}.$$

Efectuînd calculele, deducem că această ecuație vectorială este echivalentă cu următorul sistem de trei ecuații liniare, cu șase necunoscute:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+2x_4+4x_5+5x_6=-1,\\ 2x_1+x_2+3x_3+3x_5+5x_6=7,\\ x_1+x_2+2x_3+2x_5+2x_6=3. \end{cases}$$

Probleme date spre rezolvare:

6. Fie vectorii:

$V_1=(1\ -2\ 3\ 4)^t$; $V_2=(-2\ 3\ 1\ 2)^t$; $V_3=(-2\ 2\ -1\ 0)^t$.

Să se calculeze o combinație liniară convexă a acestor trei vectori, cu toți scalarii egali.

Indicații și răspuns. Trebuie să avem $V_t=\lambda_1V_1+\lambda_2V_2+\lambda_3V_3$, cu $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1/3$.

Deci: $v=(-1\ \ 1\ \ 1\ \ 2)^t$.

7. Fie vectorii: $v_1=(1\ -3\ 2)^t$ și $v_2=(2\ 4\ -5)^t$. Să se calculeze u și w, ce verifică următoarele două egalități (ecuații):

$$\begin{cases} 2u-w=v_1,\\ -u+3w=v_2. \end{cases}$$

Indicații și răspuns. $u=\frac{3}{5}v_1+\frac{1}{5}v_2=\left(1\ -1\ \frac{1}{5}\right)^t$,

$$w=\frac{1}{5}v_1+\frac{2}{5}v_2=\left(1\ 1\ -\frac{8}{5}\right)^t.$$

Scanned with OKEN Scanner

8. Să se cerceteze dependența sau independența liniară a celor trei vectori de mai jos, în raport cu toate valorile reale ale parametrului m:

$$v_1 = (2 \quad -1 \quad 3 \quad 2)^t,$$

$$v_2 = (1 \quad -1 \quad 2 \quad 1)^t,$$

$$v_3 = (-4, \quad 1 \quad -5 \quad m)^t.$$

Răspuns. Pentru $m = -4$, vectorii sînt liniar dependenți, iar pentru $m \neq -4$ sînt liniar independenți.

9. Cîte baze se pot forma cu coloanele matricei:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{array} ?$$

Indicație și răspuns. Se cercetează $C_5^3 = 10$ sisteme de cîte trei vectori, dintre care numai șase reprezintă baze în R^3.

10. Să se calculeze, cu ajutorul metodei Gauss-Jordan, inversa următoarei matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Răspuns.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

11. Fie cele șase coloane ale matricei de mai jos, notate succesiv cu a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 și a_6:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

Să se descompună, folosind metoda Gauss—Jordan, toți cei șase vectori, în următoarele baze:

a. $B_1 = \{a_1, a_3, a_5\}$;

b. $B_2 = \{a_1, a_2, a_5\}$;

c. $B_3 = \{a_2, a_4, a_5\}$.

Indicație. Inițial, se poate folosi drept al treilea vector unitar, chiar vectorul a_4.

Răspuns

a. $a_2 = -a_1 - a_3 + 4a_5$; $a_4 = -a_1 + a_3 + a_5$;

$$a_6 = 2a_1 - 3a_3 + 4a_5.$$

b. $a_3 = -a_1 - a_2 + 4a_5$; $a_4 = -2a_1 - a_2 + 5a_5$;

$$a_6 = 5a_1 + 3a_2 - 8a_5.$$

c. $a_1 = -\frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_4 + \frac{5}{2}a_5$;

$$a_3 = -\frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_4 + \frac{3}{2}a_5;\ a_6 = \frac{1}{2}a_2 - \frac{5}{2}a_4 + \frac{9}{2}a_5;$$

II.2. Mulțimi de soluții ale unui sistem de ecuații liniare

În prima parte a paragrafului de față, vom revedea — în mod sistematizat — unele cunoștințe despre sistemele de ecuații liniare.

Forma generală a unui sistem de ecuații liniare este următoarea:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

unde s-au notat, așa cum se obișnuiește:

m = *numărul ecuațiilor*,

n = *numărul necunoscutelor*.

Scanned with OKEN Scanner

Scris ca mai sus, se zice că sistemul are *forma algebrică desfășurată*. Forma algebrică se poate scrie și condensat, astfel:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i, \text{ pentru } i = 1, 2, \ldots, m.$$

Aceasta înseamnă că înlocuind pe rînd, în această egalitate, pe i cu 1, cu 2 ș.a.m.d., se obțin prima ecuație, a doua ecuație ș.a.m.d.

Să înlocuim, de pildă, $i = 1$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot x = b_1.$$

Aceasta este prima ecuație a sistemului, deoarece suma din partea stîngă a egalității se scrie desfășurat astfel, înlocuind pe rînd j cu 1, 2, ..., n:

— pentru $j = 1$: $a_{11} \cdot x_1$,
— pentru $j = 2$: $a_{12} \cdot x_2$,
.....
— pentru $j = n$: $a_{1n} \cdot x_n$.

} însumate: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n$

În forma generală a sistemului, coeficienții necunoscutelor sînt notați cu a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$,

— *primul indice arată ecuația din care face parte coeficientul*;

— *al doilea indice arată necunoscuta al cărui coeficient este.*

Acești coeficienți, așezați în ordinea numerotării ecuațiilor și necunoscutelor, formează o matrice cu m linii și n coloane, care se notează cu A, avînd forma următoare:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1m} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Pe de altă parte, coloana termenilor liberi reprezintă un vector m-dimensional, care se notează cu b:

$$b = (b_1 \ b_2 \ldots b_m)^t.$$

Scanned with OKEN Scanner

O soluție oarecare, a sistemului de ecuații, se reprezintă printr-un vector coloană n-dimensional, care se notează în general cu X. Componentele acestui vector sînt valorile ce se atribuie respectiv necunoscutelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pentru ca toate ecuațiile sistemului să fie verificate (să devină egalități numerice adevărate). În general, scriem:

$$x = (x_1 \; x_2 \ldots x_n)^t.$$

Exemplu. Fie sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 200, \\ x_1 + x_2 + \quad - 2x_4 = 185. \end{cases}$$

Matricea coeficienților sistemului și vectorul coloană b sînt următoarele:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 200 \\ 185 \end{pmatrix}.$$

O soluție oarecare se notează prin:

$$X = (x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4)^t.$$

Iată, ca exemplu, două soluții particulare, ale sistemului:

— Soluția: $\begin{cases} x_1 = 25, \\ x_2 = 60, \\ x_3 = 40, \\ x_4 = 10. \end{cases}$ se scrie: $X = \begin{pmatrix} 25 \\ 60 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}$

— Soluția: $\begin{cases} x_1 = 185, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = -42{,}5, \\ x_4 = 0 \end{cases}$ se scrie: $X_2 = \begin{pmatrix} 185 \\ 0 \\ -42{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Cu notațiile introduse, întreg sistemul de ecuații liniare se poate scrie printr-o singură ecuație matricială de gradul întîi, de forma $AX = b$, fapt pe care îl exemplificăm pe baza sistemului din exemplul anterior. Astfel, calculînd:

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_4, \end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

egalitatea celor doi vectori $AX = b$, respectiv:

$$\begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 \\ x_1 + 3x_2 - - - 2x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 185 \end{pmatrix},$$

are loc dacă și numai dacă avem:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 200, \\ x_1 + 3x_2 - \quad - 2x_4 = 185. \end{cases}$$

Reținem! Forma matricială a oricărui sistem de ecuații liniare este:

$$AX = b, \tag{I.2.1}$$

unde numărul ecuațiilor și numărul necunoscutelor sînt date de dimensiunile matricei A.

O altă formă, în care poate fi scris un sistem de ecuații liniare, formă folosită adesea în demonstrațiile unor proprietăți, este *forma vectorială*. Dacă notăm cu $a_1, a_2, \ldots a_n$, coloanele matricei A, în ordinea în care apar ele în această matrice, întreg sistemul se scrie printr-o singură ecuație, ce conține vectori, de forma următoare:

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n = b.$$

Aici, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt scalari (numere reale) care reprezintă valorile necunoscutelor ce verifică ecuația respectivă, deci sistemul dat. Dăm justificarea acestei forme de scriere a sistemului, pe baza aceluiași exemplu, folosind și la forma matricială, accentuînd asupra faptului că justificarea se face la fel și pe cazul general. Vom avea:

$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, prima coloană a matricei A, care conține coeficienții necunoscutei x_1;

$a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, a doua coloană a matricei A, care conține coeficienții necunoscutei x_2;

$a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, a treia coloană a matricei A, care conține coeficienții necunoscutei x_3;

$a_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, a patra coloană a matricei A, care conține coeficienții necunoscutei x_4.

Atenție! Observați corespondența dintre indicele vectorului a_i, $i = 1, 2, 3, 4$ și indicele necunoscutei corespunzătoare x_i, ai cărei coeficienți sînt componentele vectorului.

Scanned with OKEN Scanner

Combinația liniară $x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4$ se scrie și se calculează astfel:

$$x_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}2x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4\\ x_1 + 3x_2 - 2x_4\end{pmatrix}.$$

Egalitatea dintre vectorul rezultat mai sus și vectorul b are loc dacă și numai dacă avem:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 200,\\ x_1 + 3x_2 - 2x_4 = 185. \end{cases}$$

ceea ce voiam să arătăm.

Reținem! Forma vectorială a unui sistem de ecuații liniare este:

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n = b \qquad \text{(I.2.2.)}$$

unde vectorii $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt vectorii-coloane ai matricei A. Această egalitate se poate scrie și condensat, astfel:

$$\sum_{j=1}^{n} x_ja_j = b. \qquad \text{(II.2.2'.)}$$

Forma vectorială a sistemului de ecuații liniare, (II.2.2.), cere ca în spațiul R^m vectorul b să se exprime ca o combinație liniară a vectorilor $a_1, a_2, \ldots, a_n$, valorile necunoscutelor fiind coeficienții acestei exprimări. Dacă sistemul este incompatibil (nu admite nici o soluție), înseamnă că o asemenea exprimare este imposibilă și relația (II.2.2.) este fictivă. Din contră, dacă sistemul este compatibil, coloana b poate fi exprimată cel puțin într-un mod, ca o combinație liniară a vectorilor $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Evident că — în cazul unui sistem determinat (cu o singură soluție) — această exprimare este unică, iar în cazul unui sistem nedeterminat (cu o infinitate de soluții), exprimarea este posibilă într-o infinitate de feluri.

Exemplu. În cazul sistemului folosit în exemplele anterioare, exprimarea vectorului b, ca o combinație liniară a vectorilor a_1, a_2, a_3 și a_4, este posibilă în mai multe feluri, sistemul fiind nedeterminat. Astfel, de pildă, corespunzător soluției $X_1 = (25\ 60\ 40\ 10)^t$, forma vectorială a sistemului

Scanned with OKEN Scanner

se transformă în egalitatea: $25a_1 + 60a_2 + 40a_3 + 10a_4 = b$, care poate fi verificată cu ușurință de către cititor. De asemenea, corespunzător soluției $X_2 = (185\ 0\ -42{,}5\ 0)$, forma vectorială a sistemului se verifică sub forma egalității:

$$185a_1 - 42{,}5a_3 = b.$$

În legătură cu cercetarea compatibilității sau incompatibilității unui sistem de ecuații liniare, se cunoaște *teorema Kronecker—Capelli*, care se enunță astfel:

„Condiția necesară și suficientă, ca un sistem de ecuații liniare să fie compatibil, este ca rangul matricei sistemului să fie egal cu rangul matricei extinse".

Reamintim că matricea extinsă se obține din matricea A, a sistemului, adăugîndu-i o coloană finală, formată cu termenii liberi corespunzători. Ea se notează și se reprezintă, de obicei, astfel:

$$A_e = (A \mid b).$$

Regulă practică pentru cercetarea compatibilității unui sistem liniar:

— se calculează rangul matricei A, a sistemului;
— se calculează rangul matricei extinse, A_e;
— dacă rang A = rang A_e, sistemul este compatibil;
— dacă rang $A \neq$ rang A_e, sistemul este incompatibil.

În ceea ce privește *numărul de soluții* ale sistemului, în cazul cînd el este compatibil, pot exista umătoarele două cazuri:

— dacă rang A = rang $A_e = n$ (numărul necunoscutelor), sistemul este determinat (are o soluție unică);

— dacă rang A = rang $A_e < n$ (numărul necunoscutelor), sistemul este nedeterminat (are o infinitate de soluții).

În vederea rezolvării unui sistem liniar compatibil, se înlătură mai întîi — dacă este cazul — unele ecuații, numite *ecuații neprincipale*, acestea fiind consecințe ale sistemului rămas. Pentru efectuarea corectă a acestei operații, trebuie găsit în prealabil un *determinant principal* al matricei sistemului (un minor nenul al acestei matrice, de ordin egal cu rangul matricei), determinant ce apare de obicei în procesul de calcul al rangului. Ecuațiile care au coeficienți ce intră în compunerea acestui determinant se numesc *ecuații principale* și se păstrează, iar ecuațiile care au coeficienți ce nu intră în

Scanned with OKEN Scanner

compunerea determinantului principal sînt *ecuații neprincipale* și se înlătură.

Observație. Alegerea determinantului principal poate fi făcută în mai multe feluri, existînd — de obicei — mai mulți determinanți minori diferiți de zero, al căror ordin este egal cu rangul matricei. Oricum am face însă această alegere, sistemul format numai cu ecuațiile principale are mereu aceeași mulțime de soluții.

Atenție! Nu înlăturați în mod arbitrar anumite ecuații ale sistemului, ci numai conform regulii de mai sus! În caz contrar, fie că sistemul rămas nu mai este echivalent cu cel dat (are altă mulțime de soluții), fie că el conține un exces de ecuații și nu poate fi rezolvat cu metoda ce urmează a fi prezentată.

Exemplu. Fie următorul sistem de patru ecuații liniare, cu șase necunoscute:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 = 12, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 4x_6 = 20, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - 3x_6 = 6, \\ 2x_1 - 9x_2 - 6x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 13x_6 = 30. \end{cases}$$

Matricea extinsă este cea care urmează, pînă la bara verticală fiind matricea A:

$$A_e = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 12 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 2 & 4 & 20 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -3 & 6 \\ 2 & -9 & -6 & 3 & 5 & 13 & 30 \end{array}\right).$$

Calculînd rangurile celor două matrici, obținem:

$$\text{rang } A = \text{rang } A_e = 3,$$

ceea ce înseamnă că sistemul este compatibil. Un determinant principal este, în acest caz, un minor de ordinul trei, diferit de zero, al matricei A (în care nu intră coloana b).

Să luăm de pildă:

$$D_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece în acest determinant au intrat coeficienți din primele trei ecuații, spunem că acestea sînt ecuații principale și înlăturăm pe cea de a patra ecuație, fiind neprincipală. Sistemul dat este echivalent cu următorul sistem de trei ecuații liniare, cu șase necunoscute, el avînd cele trei ecuații independente (nici una nu rezultă ca o consecință a celorlalte):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 = 12, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 4x_6 = 20, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - 3x_6 = 6. \end{cases}$$

Evident, dacă pentru rezolvare am păstra în sistem numai două ecuații, am greși. Dacă am fi luat ca determinant principal următorul minor de ordinul trei, al matricei A:

$$D'_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -9 & -6 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

ar fi trebuit să înlăturăm din sistem ecuația a treia, ca neprincipală. În acest caz, se păstrează sistemul format cu prima, a doua și a patra ecuație, dintre cele date, sistem care va avea aceeași mulțime de soluții, ca și cel rămas în cazul folosirii determinantului principal D_p.

Rezolvarea efectivă a sistemului de ecuații principale se face astfel:

— se păstrează, în partea stîngă a fiecărei ecuații, numai termenii ce conțin *necunoscute principale* (care au coeficienți ce fac parte din determinantul principal folosit);
— ceilalți termeni, ce conțin necunoscute neprincipale, se trec în partea dreaptă, considerînd apoi drept termeni liberi expresiile ce vor apare la dreapta semnelor de egalitate;
— se rezolvă sistemul obținut, care are același număr de ecuații, ca și de necunoscute, iar al cărui determinant este diferit de zero, printr-una din metodele cunoscute (reducere, substituție, aplicarea regulii lui Cramer, Gauss-Jordan), găsind expresii ale necunoscutelor principale, în funcție, de necunoscutele neprincipale;
— orice soluție particulară, a sistemului dat, se obține atribuind valori arbitrare necunoscutelor neprincipale și calculînd valorile necunoscutelor principale cu ajutorul expresiilor găsite mai sus.

Scanned with OKEN Scanner

Observații. 1. Datorită felului în care se află diferite soluții particulare ale sistemului, cu ajutorul expresiilor ce dau necunoscutele principale în funcție de cele neprincipale, grupul acestor expresii poartă numele de *soluție generală a sistemului*.

2. Dacă problema cere de la început o singură soluție particulară a sistemului, putem proceda și astfel: înlocuim, în sistemul ecuațiilor principale, necunoscutele neprincipale prin valori arbitrare și rezolvăm sistemul de tip Cramer obținut, găsind în mod unic valorile necunoscutelor principale, cu care se completează soluția căutată. Evident, luînd ca punct de plecare alt grup de valori ale necunoscutelor neprincipale, metoda conduce la altă soluție particulară.

Exemplu. Continuînd rezolvarea sistemului, din exemplul anterior, trebuie să păstrăm în partea stîngă a fiecărei ecuații principale, numai termenii care conțin necunoscutele x_1, x_2 și x_3, atît în cazul utilizării ca determinant principal pe D_p, cît și în cazul lui D'_p. Fixîndu-ne, de pildă, asupra lui D_p, sistemul celor trei ecuații principale, scris mai sus, devine:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12 - 2x_4 - x_5 - x_6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 20 - 2x_4 - 2x_5 - 4x_6, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 6 + x_4 + x_5 + 3x_6. \end{cases}$$

Aici, vom considera expresiile din dreapta ca niște termeni liberi, rezolvînd sistemul de trei ecuații, cu necunoscutele x_1, x_2 și x_3. Obținem:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - \frac{3}{2} x_4 - x_5 - 2x_6 \\ x_2 = -26 + x_4 + x_5 + x_6 \\ x_3 = 35 - \frac{3}{2} x_4 - x_5 \end{cases}$$

Aceasta este soluția generală a sistemului ecuațiilor principale folosite, care coincide cu soluția generală a sistemului dat. Orice soluție particulară a sistemului se poate obține de aici, dînd valori arbitrare lui x_4, x_5 și x_6 (necunoscutelor neprincipale).

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, considerînd valorile $x_4 = 6$, $x_5 = 8$ și $x_6 = 1$, expresiile de mai sus conduc la $x_1 = -16$, $x_2 = -11$, $x_3 = 18$, deci se obține soluția particulară:

$$x_1 = (-16 \quad -11 \quad 18 \quad 6 \quad 8 \quad 1)^t.$$

Cititorul este rugat să verifice această soluție pe toate cele patru ecuații ale sistemului dat.

Aceeași soluție putea fi găsită și direct, înlocuind — de la început — valorile $x_4 = 6$, $x_5 = 8$, $x_6 = 1$, în sistemul celor trei ecuații principale, ceea ce ar fi condus la sistemul de tip Cramer:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -9, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= -12, \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 23. \end{aligned}$$

Rezolvarea acestui sistem conduce la: $x_1 = -16$, $x_2 = -11$, $x_3 = 18$, regăsind astfel soluția particulară X_1 de mai sus.

Convenție importantă. Deoarece cunoaștem o metodă de eliminare a ecuațiilor neprincipale, pentru cercetarea ulterioară a sistemelor liniare compatibile, vom presupune de la început că toate ecuațiile unui sistem de acest fel sînt independente, deci principale. Aceasta înseamnă — de fapt — că rangul matricei sistemului este egal cu *numărul ecuațiilor*:

$$\text{rang } A = m. \qquad \text{(II 2.3)}$$

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$, vectorii — coloane ai matricii A, corespunzătoare unui sistem liniar, ce îndeplinește condiția (II.2.3.). A considera un determinant principal înseamnă a ne fixa asupra a m vectori — coloane, dintre cei enumerați mai sus, care să formeze o bază în R^m (coloanele cu care se scrie determinantul diferit de zero, considerat). Fie B baza alcătuită cu vectorii aleși: necunoscutele principale sînt cele ce corespund (prin indicii lor) vectorilor din baza B și le vom numi *necunoscute (variabile) bazice*, iar necunoscutele neprincipale vor fi numite *necunoscute (variabile) nebazice.*

Observație. Deoarece sistemele cu care vom lucra în aplicațiile practice sînt nedeterminate, avînd o infinitate de soluții, fiecare necunoscută poate lua diferite valori, ceea ce justifică denumirea de variabilă, cu care vom înlocui — în viitor — pe cea de necunoscută.

Scanned with OKEN Scanner

Soluția generală, scrisă cu ajutorul unui determinant principal fixat inițial (respectiv, cu ajutorul unei baze fixate B), exprimă variabilele bazice, ca funcții de variabile nebazice. Dintre soluțiile particulare, ce se pot obține din această soluție generală, ne vom opri la una singură, anume la cea care rezultă atribuind variabilelor nebazice (necunoscutelor neprincipale) valori egale cu zero. Această soluție se numește *soluție de bază* corespunzătoare bazei B, de la care s-a pornit. Ea poate avea cel mult m componente diferite de zero, anume cele ce rezultă pentru cele m variabile bazice (necunoscute principale). Evident, uneori se poate întîmpla ca și unele dintre variabilele bazice să rezulte din calcul ca fiind egale cu zero, caz în care soluția de bază are mai puțin decît m componente diferite de zero. Spunem — în acest caz — că soluția de bază respectivă este *degenerată*. În caz contrar, cînd pentru toate cele m componente bazice rezultă valori diferite de zero, spunem că soluția de bază este *nedegenerată*.

Sintetizînd cele de mai sus, dăm următoarea

Definiție importantă: O soluție de bază a unui sistem de ecuații liniare, ce verifică (II.2.3.), este o soluție care are cel mult m componente diferite de zero, acestea corespunzînd la vectori liniari independenți din matricea A.

Dacă o soluție de bază are exact m componente diferite de zero, ea este *nedegenerată*, iar dacă are mai puțin decît m componente diferite de zero, ea este *degenerată*.

Separînd din soluția de bază X (vector n—dimensional) componentele bazice (singurele ce pot fi diferite de zero), cu ele se poate forma un vector cu m componente, scrise în ordinea dată de vectorii din baza B corespunzătoare și pe care îl notăm cu X_B (componentele bazice ale soluției X).

Cîte soluții de bază poate avea un sistem de ecuații liniare?

Pentru a răspunde la această întrebare să vedem, mai întîi, cîte baze se pot forma cu vectorii—coloane ai matricei A. Există evident C_n^m grupe posibile de cîte m vectori, dintre cei n vectori—coloane, $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Dintre aceste grupe, reprezintă baze în R^m numai acelea pentru care determinanții corespunzători sînt nenuli.

În consecință, un sistem liniar cu m ecuații și n necunoscute, pentru care rang $A = m$, are cel mult C_n^m soluții de bază. Reținem, de aici, pentru raționamentele viitoare, doar faptul că *„numărul soluțiilor de bază ale sistemului este finit"*.

Scanned with OKEN Scanner

Cum se poate găsi direct soluția de bază corespunzătoare unei baze date B?

Mai întîi înlocuim în sistem — prin zero — toate variabilele nebazice (cele care corespund la vectori ce nu fac parte din B). Va rezulta un sistem de m ecuații cu m necunoscute, al cărui determinant este diferit de zero (datorită condiției că vectorii din B formează o bază în R^m); rezolvînd acest sistem, se determină în mod unic și valorile variabilelor bazice. Componentele găsite vor verifica forma vectorială a sistemului (II.2.2.), conducînd la următoarea egalitate:

$$\sum_{a_j \in B} x_j a_j = b. \qquad \text{(II.2.4.)}$$

Această egalitate nu reprezintă altceva decît descompunerea vectorului b în baza B, ceea ce justifică denumirea de soluție de bază. După cum se știe, această descompunere este unică.

Reținem! Componentele bazice, ale unei soluții de bază, reprezintă coordonatele vectorului b, al termenilor liberi, în baza corespunzătoare acelei soluții.

Din cele de mai sus, rezultă o metodă tabelară de determinare a diferitelor soluții de bază ale unui sistem de ecuații liniare, prin folosirea descompunerii vectorilor cu ajutorul metodei Gauss—Jordan. Astfel, exprimăm succesiv cei n vectori-coloane ai matricei A, precum și vectorul b — al termenilor liberi — în diferite baze formate cu grupe de vectori a_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, pornind inițial de la baza unitară a spațiului R^m. Avînd la un moment dat, într-o secțiune a tabelului, descompunerile acestor vectori într-o bază B, soluția de bază atașată acestei baze se poate citi din această secțiune, astfel:

— componentele bazice se citesc pe coloana b, păstrînd ordinea dată de vectorii corespunzători din bază,

— componentele nebazice sînt toate egale cu zero.

Exemplu. Fie sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - \quad - x_4 + 2x_5 = 7, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 11, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 4. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Matricea acestui sistem este următoarea, coloanele ei fiind notate deasupra prin simbolurile convenite:

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Cu aceste notații, forma vectorială a sistemului dat este:

$$x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5 = b. \qquad \text{(II.2.6.)}$$

Un calcul simplu conduce la: rang $A = 3$, ceea ce înseamnă — pe de o parte — că toate ecuațiile sistemului sînt principale, iar pe de altă parte că sistemul este nedeterminat.

Să vedem cîte baze ale spațiului liniar R^3 se pot forma cu ajutorul celor cinci vectori-coloane, notați mai sus cu a_1, a_2, a_3, a_4 și a_5. Grupele (sistemele) de cîte trei vectori, dintre cei cinci menționați, sînt în număr de $C_5^3 = 10$, aceste grupe fiind următoarele:

$$\{a_1, a_2, a_3\};\ \{a_1, a_2, a_4\};\ \{a_1, a_2, a_5\};\ \{a_1, a_3, a_4\};$$
$$\{a_1, a_3, a_5\};\ \{a_1, a_4, a_5\};\ \{a_2, a_3, a_4\};\ \{a_2, a_3, a_5\}$$
$$\{a_2, a_4, a_5\};\ \{a_3, a_4, a_5\}.$$

Vom cerceta fiecare grupă de acest fel, pentru a stabili dacă ea formează sau nu bază în R^3. Pentru prima grupă, $\{a_1, a_2, a_3\}$, calculăm determinantul ale cărei coloane sînt acești vectori:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Deoarece acest determinant este diferit de zero, rezultă că sistemul $\{a_1, a_2, a_3\}$ reprezintă o bază în R^3.

Sistemul $\{a_1, a_2, a_4\}$ nu reprezintă o bază în R^3, deoarece:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

În mod asemănător, se cercetează toate celelalte opt grupe. Se obține — astfel — rezultatul că există cinci baze

Scanned with OKEN Scanner

ale spațiului R^3, ce se pot forma cu vectori-coloane ai matricei A și anume:

$$B_1 = \{a_1, a_2, a_3\};\ B_2 = \{a_1, a_3, a_4\};$$
$$B_3 = \{a_1, a_3, a_5\};\ B_4 = \{a_2, a_3, a_4\};$$
$$B_5 = \{a_3, a_4, a_5\}.$$

Dăm, ca exemplu, modul în care poate fi obținută direct soluția de bază corespunzătoare bazei B_1. Conform notațiilor făcute, în cadrul acestei soluții de bază, x_1, x_2 și x_3 sînt variabile bazice, iar x_4 și x_5 sînt variabile nebazice.

Deoarece variabilele nebazice iau valori egale cu zero, în soluția de bază căutată, înlocuim $x_4 = x_5 = 0$ în sistem și obținem următorul sistem de tip Cramer (același număr de ecuații ca și de necunoscute, iar determinantul nenul, fapt verificat mai sus):

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 7, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

Rezolvînd acest sistem, obținem celelalte trei componente ale soluției de bază căutate: $x_1 = -7$, $x_2 = -14$ și $x_3 = 32$.

Înlocuind valorile găsite (inclusiv $x_4 = x_5 = 0$) în forma vectorială (II.2.6.) aceasta devine:

$$-7a_1 - 14a_2 + 32a_3 = b,$$

relație corespunzătoare lui (II.2.4) din teoria generală prezentată mai sus. Această relație nu reprezintă altceva decît descompunerea vectorului b, în baza $B_1 = (a_1, a_2, a_3)$ componentele bazice aflate mai sus fiind coordonatele lui b în baza respectivă. Scriem aceasta, conform notației adoptate, astfel:

$$x_{B_1} = (-7 \quad -14 \quad 32)^t$$

ordinea coordonatelor fiind impusă de ordinea vectorilor în care sînt scrișii vectorii corespunzători în baza B_1. Evident, dacă baza B_1 ar fi scrisă sub forma: $B_1 = (a_3, a_1, a_2)$, cu altă ordine a vectorilor, am fi scris:

$$x_{B_1} = (32 \quad -7 \quad -14)^t.$$

Deși ordinea, în care sînt scrișii vectorii într-o bază, nu este esențială, păstrăm această convenție, ea fiind utilă în sistematizarea calculelor de mai tîrziu.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru determinarea tuturor soluțiilor de bază, ale sistemului dat, pentru a nu relua calculele de la început de fiecare dată, se poate folosi metoda Gauss-Jordan, descompunînd vectorii dați succesiv în diferite baze. Calculele sînt redate în tabelul I.2.1.

Tabelul II.2.1.

Baza	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b	e_1	e_2	e_3	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$\leftarrow e_1$	1	—1	0	—1	2	7	1	0	0	
e_2	1	1	1	3	—2	11	0	1	0	(S_0)
e_3	2	1	1	4	—2	4	0	0	1	
a_1	1	—1	0	—1	2	7	1	0	0	
$\leftarrow e_2$	0	2	[1]	4	—4	4	—1	1	0	(S_1)
e_3	0	3	1	6	—6	—10	—2	0	1	
a_1	1	—1	0	—1	2	7	1	0	0	
a_3	0	2	1	4	—4	4	—1	1	0	(S_2)
$\leftarrow e_3$	0	[1]↑	0	2	—2	—14	—1	—1	1	
a_1	1	0	0	1	0	—7	0	—1	1	
a_3	0	0	1	0	0	32	1	3	—2	(S_3)
$\leftarrow a_2$	0	1	0	[2]↑	—2	—14	—1	—1	1	
a_1	1	—1/2	0	0	1	0	1/2	—1/2	1/2	
a_3	0	0	1	0	0	32	1	3	—2	(S_4)
$\leftarrow a_4$	0	1/2	0	1	[—1]↑	—7	—1/2	—1/2	1/2	
$\leftarrow a_1$	1	0	0	[1]	0	—7	0	—1	1	
a_3	0	0	1	0	0	32	1	3	—2	(S_5)
a_5	0	—1/2	0	—1	1	7	1/2	1/2	—1/2	
a_4	1	0	0	1	0	—7	0	—1	1	
a_3	0	0	1	0	0	32	1	3	—2	(S_6)
$\leftarrow a_5$	1	[—1/2]↑	0	0	1	0	1/2	—1/2	1/2	
a_4	1	0	0	1	0	—7	0	—1	1	
a_3	0	0	1	0	0	32	1	3	—2	(S_7)
a_2	—2	1	0	0	—2	0	—1	1	—1	

În continuare, comentăm acest tabel.

După cum se vede, cei șase vectori (coloanele matricei A și vectorul termenilor liberi) au fost descompuși în diferite baze, începînd cu baza unitară. Alegerea vectorilor, ce urmează a fi introduși în bază, a fost făcută astfel încît să avem,

Scanned with OKEN Scanner

de fiecare dată, un pivot cît mai comod de manevrat în calcule (de preferință +1 sau —1). De aceea, în secțiunea S_3, baza formată din vectorii a_1, a_2 și a_3 a apărut sub forma $B_1 = \{a_1, a_3, a_2\}$, ceea ce face să avem X_{B_1}:

$$X_{B_1} = (-7 \quad 32 \quad -14)^t,$$

în sensul: $x_1 = -7$, $x_3 = 32$, $x_2 = -14$.

Mai observăm că soluțiile de bază, conținute în secțiunile S_4, S_6 și S_7, sînt degenerate (avînd numai cîte două componente nenule), ele fiind chiar identice. Iată — deci — o soluție, de bază, care corespunde la baze diferite; propunem cititorului să arate că o astfel de situație nu poate să apară decît în cazul unor soluții degenerate. Reluînd exemplul rezolvat mai sus, putem spune că sistemul dat are numai trei soluții de bază distincte, și anume, cele din tabelul II.2.2.:

Tabelul II.2.2.

Număr soluții	Secțiunea	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	S_3	−7	−14	32	0	0
2	S_4, S_6, S_7	0	0	32	−7	0
3	S_5	−7	0	32	7	0

Observații. 1. Faptul că o soluție de bază este degenerată apare în metoda Gauss—Jordan prin unul sau mai multe zerouri, pe coloana b, în secțiunea respectivă.

2. Putem observa că un sistem de vectori nu formează o bază și cu ajutorul metodei Gauss—Jordan. Astfel, de exemplu, fie sistemul $\{a_1, a_2, a_4\}$. Secțiunea S_3 corespunde bazei $\{a_1, a_3, a_2\}$, care conține doi dintre vectorii sistemului luat ca exemplu. Se observă însă că aici nu se poate înlocui vectorul a_3 prin a_4, deoarece ar trebui să luăm un pivot egal cu zero.

În tabelul II.2.1. există și alte exemple de acest fel.

3. Oricare dintre secțiunile tabelului de aplicare a metodei Gauss—Jordan poate fi verificată cu formulele prezentate în paragraful precedent.

Diferite tipuri de mulțimi de soluții, ale unui sistem liniar, au proprietăți importante, ce se studiază cu ajutorul noțiunii de mulțime convexă, pe care o introducem în continuare.

Scanned with OKEN Scanner

Mulțimi convexe. O mulțime C, de vectori n-dimensionali (o submulțime a lui R^n), se zice că este convexă, dacă oricare ar fi doi vectori din ea, orice combinație liniară convexă a lor aparține — de asemenea — mulțimii.

Scriem această definiție, cu ajutorul simbolurilor logice, astfel:

$$(\forall)\ v_1,\ v_2 \in C \text{ și}$$
$$(\forall)\ \lambda_1,\ \lambda_2 \in R \text{ cu:}$$
$$\lambda_1,\ \lambda_2 \geqslant 0 \text{ și}$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in C.$$

După cum se știe, în cazul combinației liniare convexe a numai doi vectori, putem simplifica notațiile, punînd:

$$\lambda_1 = \lambda \text{ și } \lambda_2 = 1 - \lambda, \text{ unde } \lambda \in [0;\ 1].$$

În acest fel, definiția de mai sus se scrie mai simplu astfel:

$$(\forall)\ v_1,\ v_2 \in C \text{ și } \lambda \in [0;\ 1] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda v_1 + (1 - \lambda) v_2 \in C.$$

Din definiția dată mai sus rezultă, prin inducție, că oricare ar fi k vectori ai unei mulțimi convexe, o combinație liniară convexă a lor aparține — de asemenea — mulțimii:

$(\forall)\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_k \in C$ convexă și
$(\forall)\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_k \geqslant 0$, cu:

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k,\ v_k \in C.$$

Observație. Elementele (vectorii), ce formează o mulțime convexă, se mai numesc și *puncte ale mulțimii* (ele sînt — de fapt — puncte ale spațiului n — dimensional). De asemenea, mulțimea tuturor vectorilor v, ce sînt combinații liniare convexe ale vectorilor v_1 și v_2, se mai numește *segmentul* $\overline{v_1 v_2}$.

În acest sens, definiția mulțimii convexe se poate da și astfel:

C este convexă dacă pentru orice două puncte $v_1,\ v_2 \in C$, întreg segmentul care le unește este inclus în C.

Exemplu. Fie C mulțimea numerelor reale (vectori unidimensionali), din intervalul închis $[a,\ b]$. Această mulțime

Scanned with OKEN Scanner

este convexă deoarece, oricare ar fi numerele $\alpha, \beta \in [a, b]$ și oricare ar fi $\lambda \in [0, 1]$, avem:

$$\lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta \in [a, b].$$

Într-adevăr, dacă $\alpha > \beta$, funcția $f(\lambda)$:

$$f(\lambda) = \lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta = (\alpha - \beta)\lambda + \beta$$

este crescătoare pe intervalul $[0, 1]$ și ia cea mai mică valoare pentru $\lambda = 0$ și cea mai mare valoare pentru $\lambda = 1$, adică:

$$f(0) \leqslant f(\lambda) \leqslant f(1), \text{ respectiv:}$$

$$\beta \leqslant \lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta \leqslant \alpha.$$

Deoarece $[\alpha, \beta] \subset [\alpha, b]$ rezultă:

$$\lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta \in [a, b].$$

Asemănător se justifică proprietatea și pentru $\alpha < \beta$, caz în care funcția $f(\lambda)$ este descrescătoare pe intervalul $[0, 1]$.

În sfîrșit, pentru $\alpha = \beta$, proprietatea este evidentă, deoarece $f(\lambda) = \beta \in [a, b]$.

Vîrfurile unei mulțimi convexe. Fiind dată o mulțime convexă C, vectorul $v \in C$ se numește vîrf (punct extrem) al acestei mulțimi, dacă nu există alți doi vectori din mulțimea C, diferiți de v, astfel încît v să poată fi scris ca o combinație liniară convexă a lor.

Cu simboluri logice, putem scrie că v este vîrf al mulțimii C, dacă:

$(\exists)\ v_1, v_2 \in C$, cu $v_1 \neq v$, $v_2 \neq v$, $v_1 \neq v_2$, astfel încît: $\lambda v_1 + (1 - \lambda)v_2 \in C$, cu $\lambda \in [0; 1]$.

Exemplu. Considerînd mulțimea numerelor reale din intervalul $[a, b]$, aceasta este o mulțime convexă cu două vîrfuri, anume capetele intervalului. Într-adevăr, luînd de pildă pe a, oricare ar fi două numere din interval, diferite de a, nu putem avea situația ca a să se afle între ele (pe segmentul care le unește).

În cele ce urmează, enunțăm cîteva teoreme, care descriu proprietățile unor mulțimi de soluții, corespunzătoare unui sistem de ecuații liniare nedeterminat.

Cititorul poate găsi demonstrațiile generale ale tuturor acestor teoreme în materialele indicate în bibliografie.

În lucrarea de față, vom încerca să ușurăm înțelegerea unora dintre aceste demonstrații, prin anumite interpretări, particularizări și exemplificări.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema II.2.1. Mulțimea tuturor soluțiilor unui sistem de ecuații liniare nedeterminat este o mulțime convexă.

Justificarea acestei teoreme se poate face cu ușurință folosind forma matricială a sistemului: $AX = b$.

Fie M mulțimea de soluții a sistemului și X_1, X_2 două soluții oarecare (deci $X_1 \in M$, $X_2 \in M$).

Fie — de asemenea — un număr real $\lambda \in [0; 1]$; arbitrar în acest interval. Trebuie să arătăm că:

$$\bar{X} = \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2$$

aparține — de asemenea — mulțimii M, adică este o soluție a sistemului dat.

Să verificăm această proprietate prin înlocuirea în forma vectorială a sistemului:

$$A\bar{X} = b, \text{ sau: } A[\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2] = b.$$

Efectuăm calculele în partea stîngă a egalității, folosind proprietățile operațiilor cu matrice:

$$A \cdot \lambda \cdot X_1 + A(1 - \lambda)X_2 = b \text{ sau:}$$

$$\lambda \cdot AX_1 + (1 - \lambda)AX_2 = b.$$

Dar X_1 și X_2 sînt soluții ale sistemului, deci:

$$AX_1 = b \text{ și } AX_2 = b.$$

Înlocuind în egalitatea pe care vrem să o verificăm, obținem:

$$\lambda b + (1 - \lambda)b = b,$$

egalitate evidentă pentru orice valoare a lui λ.

Exemplu. Fie următorul sistem de două ecuații cu trei necunoscute:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_2 = 50, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 70. \end{cases}$$

Să considerăm, de exemplu, următoarele două soluții, pe care cititorul le poate verifica pe sistem:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 28 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad X_2 = \begin{pmatrix} 16 \\ 39 \\ -1 \end{pmatrix};$$

Scanned with OKEN Scanner

Calculăm numai două combinații liniare convexe ale acestor doi vectori și anume pentru $\lambda = 1/3$ și pentru $\lambda = 2/5$:

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}28\\12\\2\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}16\\39\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20\\30\\0\end{pmatrix},$$

$$\bar{X}_2 = \frac{2}{5}X_1 + \frac{3}{5}X_2 = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}28\\12\\2\end{pmatrix} + \frac{3}{5}\begin{pmatrix}16\\39\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}104/5\\141/5\\1/5\end{pmatrix}.$$

Se poate verifica direct, înlocuind în sistemul dat, că atît $\bar{X}_1$, cît și $\bar{X}_2$, reprezintă de asemenea soluții ale sistemului.

Teorema II.2.2.: Mulțimea soluțiilor unui sistem de ecuații liniare nedeterminat, care au toate componentele nenegative, este o mulțime convexă.

Justificarea acestei teoreme este asemănătoare cu a celei precedente, cu observația suplimentară că dacă $X_1 \geqslant 0$ și $X_2 \geqslant 0$ (toate componentele acestor doi vectori sînt nenegative), atunci avem și:

$$\bar{X} = \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2 \geqslant 0.$$

Într-adevăr, dacă $\lambda \in [0; 1]$, avem simultan:

$$\lambda \geqslant 0 \text{ și } (1 - \lambda) \geqslant 0.$$

Observație. Este posibil ca un sistem de ecuații liniare nedeterminat să nu admită nici o soluție cu toate componentele nenegative, respectiv să admită o singură soluție de acest fel. Pentru ca această proprietate să fie generală, considerăm că mulțimea vidă, precum și mulțimile cu cîte un singur element, sînt mulțimi convexe.

Teorema II.2.3. Soluțiile de bază cu componente nenegative, ale unui sistem de ecuații liniare cu rang $A = m$, reprezintă toate vîrfurile mulțimii convexe, a soluțiilor cu componente nenegative, pe care le admite sistemul respectiv.

Prezentăm justificarea acestei teoreme pe un exemplu numeric. În acest scop, vom folosi următorul sistem, de două ecuații cu patru necunoscute, pentru care rang $A = 2 =$ = numărul ecuațiilor:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 60, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 90. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cititorul poate verifica faptul că acest sistem are doar *patru soluții de bază, cu componente nenegative* și anume:

$$X_1 = (40 \quad 0 \quad 10 \quad 0)^t;\ X_2 = (30 \quad 0 \quad 0 \quad 30)^t;$$
$$X_3 = (\ 0 \quad 24 \quad 18 \quad 0)^t;\ X_4 = (\ 0 \quad 15 \quad 0 \quad 45)^t.$$

Notînd cu M mulțimea tuturor soluțiilor cu componente nenegative, într-o primă parte a demonstrației arătăm că toate cele patru soluții de bază, de mai sus, reprezintă vîrfuri ale mulțimii M (care este convexă, conform teoremei II.2.2.). Raționăm, de exemplu, pe soluția X_1, care corespunde bazei $B_1 = \{a_1, a_3\}$.

Să presupunem, prin absurd, că X_1 nu reprezintă un vîrf al mulțimii M. Cu această presupunere, ar exista soluții $X', X'' \in M$, cu $X' \neq X_1$; $X'' \neq X_1$; $X' \neq X''$, astfel încît are loc relația:

$$X_1 = \lambda X' + (1 - \lambda)X'', \quad \lambda \in [0;\ 1].$$

Să observăm, în plus, că pentru $\lambda = 0$, această relație conduce la $X_1 = X''$, iar pentru $\lambda = 1$ ea dă $X_1 = X'$. Aceasta înseamnă că putem restrînge intervalul pentru λ, impunînd $\lambda \in (0,\ 1)$.

Fie: $X' = (x_1' \quad x_2' \quad x_3' \quad x_4')^t$ și $X'' = (x_1'' \quad x_2'' \quad x_3'' \quad x_4'')^t$ cele două soluții, componentele lor fiind toate nenegative. Relația, presupusă mai sus, devine:

$$\begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \\ x_4'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1' + (1 - \lambda)x_1'' \\ \lambda x_2' + (1 - \lambda)x_2'' \\ \lambda x_3' + (1 - \lambda)x_3'' \\ \lambda x_4' + (1 - \lambda)x_4'' \end{pmatrix}$$

și ea nu poate avea loc decît dacă avem simultan:

$$\begin{cases} \lambda x_1' + (1 - \lambda)x_1'' = 40, \\ \lambda x_2' + (1 - \lambda)x_2'' = 0, \\ \lambda x_3' + (1 - \lambda)x_3'' = 10, \\ \lambda x_4' + (1 - \lambda)x_4'' = 0. \end{cases}$$

Din $\lambda \in (0;\ 1)$ deducem $\lambda > 0$ și $(1 - \lambda) > 0$.

Ținînd seamă și de faptul că $x_2' \geqslant 0$ și $x_2'' \geqslant 0$, din egalitatea:

$$\lambda x_2' + (1 - \lambda)x_2'' = 0$$

rezultă că $x_2' = 0$ și $x_2'' = 0$. Într-adevăr, suma a două valori nenegative nu poate fi egală cu zero decît dacă ambele valori sînt nule, iar factorii λ și $(1 - \lambda)$ nu sînt nuli.

Scanned with OKEN Scanner

Asemănător, se arată că din egalitatea:

$$\lambda x_4' + (1 - \lambda) x_4'' = 0,$$

rezultă $x_4' = 0$ și $x_4'' = 0$. Să revenim acum la sistemul dat, a cărui formă vectorială este următoarea:

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 = b,$$

a_1, a_2, a_3, a_4, respectiv, b, fiind coloanele matricei sistemului, respectiv, coloana termenilor liberi, toate privite ca vectori în R^2. Să arătăm că X' și X'' sînt soluții ale sistemului, deci că verifică acest sistem:

$$x_1' a_1 + x_2' a_2 + x_3' a_3 + x_4' a_4 = b \text{ și}$$
$$x_1'' a_1 + x_2'' a_2 + x_3'' a_3 + x_4'' a_4 = b.$$

De aici, ținînd seama de valorile găsite, $x_2' = x_2'' = 0$ și $x_4' = x_4'' = 0$, rezultă că putem scrie:

$$x_1' a_1 + x_3' a_3 = b \text{ și } x_1' a_1 + x_3' a_3 = b.$$

Acestea sînt două descompuneri ale vectorului b, în baza B_1. Cum descompunerea unui vector într-o bază este unică, trebuie să avem:

$$x_1' = x_1'' \text{ și } x_3' = x_3''.$$

În consecință, cele două soluții, presupuse mai sus, sînt egale: $X' = X''$, ceea ce nu se poate deoarece prin ipoteză $X' \neq X''$.

Deci, presupunerea făcută, că X_1 nu ar fi vîrf al mulțimii M, este absurdă, realitatea fiind că X_1 este un astfel de vîrf. Asemănător, se poate arăta că și celelalte trei soluții de bază, cu componentele nenegative, reprezintă vîrfuri ale mulțimii M.

Observație. Pentru raționamentul pe cazul general, este comod ca toate componentele strict pozitive ale soluției de bază cercetate să fie pe primele locuri ale acestui vector. În acest scop, se poate face o renumerotare a variabilelor. Astfel, de exemplu: pentru soluția X, de mai sus, putem nota variabilele astfel:

$$\bar{X}_1 = X_1;\ \bar{X}_2 = X_3;\ \bar{X}_3 = X_2;\ \bar{X}_4 = X_4.$$

Cu aceste notații sistemul devine:

$$\begin{cases} \bar{X}_1 + 2\bar{X}_2 + \bar{X}_3 + \bar{X}_4 = 60, \\ 2\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + 3\bar{X}_3 + \bar{X}_4 = 90, \end{cases}$$

iar soluția X_1 se scrie astfel: $\bar{X}_1 = (40\ 10\ 0\ 0)^t$.

Scanned with OKEN Scanner

În cea de a doua parte a demonstrației, să arătăm că mulțimea M nu mai are și alte vîrfuri, în afara celor patru. Cu alte cuvinte să arătăm că orice vîrf al mulțimii M reprezintă o soluție de bază a sistemului. Fie, de pildă, o soluție de forma:

$$X = (X_1\ X_2\ X_3\ 0)^t, \text{ cu } X_1 > 0,$$

$X_2 > 0$, $X_3 > 0$, și să arătăm că ea nu poate fi vîrf al mulțimii M, deoarece vectorii a_1, a_2 și a_3 sînt liniari dependenți. Se găsește ușor relația de dependență a acestor vectori:

$$-5a_1 + 3a_2 + a_3 = 0. \qquad \text{(II.2.7)}$$

Pe de altă parte verificarea formei vectoriale a sistemului cu soluția X conduce la $X_1a_1 + X_2a_3 + X_3a_3 = b$ (II.2.8).

Înmulțim relația (II.2.7) cu un număr ε, încă nedeterminat și scriem egalitatea obținută sub relația (II.2.8)

$$\begin{cases} x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 = b, \\ -5\varepsilon a_1 + 3\varepsilon a_2 + \varepsilon a_3 = 0. \end{cases}$$

Adunînd și apoi scăzînd, cele două egalități obținute, vom avea:

$$(x_1 - 5\varepsilon)a_1 + (x_2 + 3\varepsilon)a_2 + (x_3 + \varepsilon)a_3 = b.$$
$$(x_1 + 5\varepsilon)a_1 + (x_2 - 3\varepsilon)a_2 + (x_3 - \varepsilon)a_3 = b.$$

Aceasta înseamnă că putem vorbi despre următoarele două soluții ale sistemului dat:

$$X' = (x_1 - 5\varepsilon \quad x_2 + 3\varepsilon \quad x_3 + \varepsilon \quad 0)^t \text{ și}$$
$$X'' = (x_1 + 5\varepsilon \quad x_2 - 3\varepsilon \quad x_3 - \varepsilon \quad 0)$$

Deoarece x_1, x_2 și x_3 sînt strict pozitive, se poate alege valoarea lui $\varepsilon \neq 0$, astfel încît X' și X'' să aibă toate componentele strict pozitive. Într-adevăr, din condițiile:

$$x_1 - 5\varepsilon > 0 \quad \text{și} \quad x_1 + 5\varepsilon > 0,$$

rezultă:

$$-\frac{x_1}{5} < \varepsilon < \frac{x_1}{5} \quad \text{sau} \quad |\varepsilon| < \frac{x_1}{5}.$$

Din condițiile: $x_2 + 3\varepsilon > 0$ și $x_2 - 3\varepsilon > 0$, rezultă:

$$-\frac{x_2}{3} < \varepsilon < \frac{x_2}{3}, \text{ sau } |\varepsilon| < \frac{x_2}{3}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În sfîrșit, din condițiile: $x_3 + \varepsilon > 0$ și $x_3 - \varepsilon > 0$, rezultă: $-x_3 < \varepsilon < x_3$, sau $|\varepsilon| < x_3$. Este evident că toate cele șase condiții pot fi satisfăcute simultan, dacă avem:

$$|\varepsilon| < \min. \left\{ \frac{x_1}{5}; \frac{x_2}{3}, x_3 \right\}.$$

În consecință, putem presupune că toate componentele soluțiilor X' și X'' sînt nenegative, deci că ele aparțin mulțimii M. Pe de altă parte, se poate observa cu ușurință că avem:

$$X = \frac{1}{2} X' + \frac{1}{2} X'',$$

fapt pe care cititorul îl poate verifica efectuînd calculele în această egalitate scrisă pe componente:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 - 5\varepsilon \\ x_2 + 3\varepsilon \\ x_3 + \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 + 5\varepsilon \\ x_2 - 3\varepsilon \\ x_3 - \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Relația găsită arată însă că soluția X poate fi scrisă ca o combinație liniară convexă (suma coeficienților este egală cu unu) a altor două soluții din mulțimea M, ceea ce înseamnă că X nu poate fi vîrf al acestei mulțimi.

Cititorul poate observa că din $\varepsilon \neq 0$, rezultă și $X' \neq X$, $X'' \neq X$.

Observație. Dacă soluția pe care o cercetăm ar avea patru componente strict pozitive, adică ar fi de forma:

$$X = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^t,$$

raționamentul ar fi același, cu deosebirea că datorită relației de dependență: $-5a_1 + 3a_2 + a_3 = 0$, soluțiile X' și X'' ar avea a patra componentă egală cu x_4. Valoarea lui ε rămîne aceeași.

Din cele de mai sus, rezultă că relația

$$X = \frac{1}{2} X' + \frac{1}{2} X''$$

este o consecință a existenței unei relații de dependență liniară între vectorii corespunzători componentelor strict pozitive (raționamentul s-ar păstra și dacă ar exista numai două astfel de componente). În consecință, nu poate fi vîrf al mulțimii M

Scanned with OKEN Scanner

decît o astfel de soluție a sistemului, pentru care componentele strict pozitive corespund la vectori liniar independenți ai matricei A, cu alte cuvinte o soluție de bază. Cu acestea, justificarea teoremei este completă.

Teorema II.2.4. Mulțimea soluțiilor unui sistem de ecuații liniare, cu toate componentele nenegative, care dau unei funcții liniare a valoare constantă, este o mulțime convexă.

Vom prezenta justificarea acestei teoreme pentru cazul particular cînd există numai trei variabile, numai din motive de economie de scriere, justificarea fiind aceeași și pentru cazul general. Astfel, fie funcția liniară de forma:

$$f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3,$$

unde $X = (x_1\ x_2\ x_3)^t$. Fie — de asemenea — două soluții oarecare ale sistemului de ecuații liniare (care nu va apare efectiv în raționamentul nostru), soluții care au componentele nenegative și care dau funcției $f(X)$ o valoare constantă K:

$$X' = (x_1'\ x_2'\ x_3')^t \text{ și } X'' = (x_1''\ x_2''\ x_3'')^t.$$

Notînd cu M mulțimea tuturor soluțiilor sistemului, cu componente nenegative, care dau funcției $f(X)$ valoarea K, fie X', $X'' \in M$. Să notăm:

$$\bar{X} = (\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ \bar{x}_3)^t$$

o combinație liniară convexă a soluțiilor X' și X'', adică

$$\bar{X} = \lambda X' + (1 - \lambda)X'', \text{ cu } \lambda \in [0, 1].$$

Scriind pe componente această relație, avem:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix}$$

de unde se deduce ușor următorul sistem de egalități:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \lambda x_1' + (1 - \lambda)x_1'' \mid \cdot c_1 \\ \bar{x}_2 = \lambda x_2' + (1 - \lambda)x_2'' \mid \cdot c_2 \\ \bar{x}_3 = \lambda x_3' + (1 - \lambda)x_3'' \mid \cdot c_3 \end{cases}$$

Înmulțind aceste egalități respectiv cu c_1, c_2 și c_3 și adunînd rezultatele, vom avea:

$$c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 + c_3\bar{x}_3 = \lambda(c_1x_1' + c_2x_2' + c_3x_3') + (1 - \lambda)(cx_1'' + c_2x_2'' + c_3x_3'').$$

Scanned with OKEN Scanner

adică:

$$f(\bar{X}) = \lambda f(X') + (1 - \lambda) f(X'').$$

Deoarece $f(X') = f(X'') = K$, putem calcula:

$$f(\bar{X}) = \lambda K + (1 - \lambda) K = K.$$

Cu alte cuvinte, și soluția $\bar{X}$ dă funcției $f(X)$ o valoarea egală cu K. În plus, deoarece $\lambda \in [0, 1]$, adică $\lambda \geqslant 0$ și $(1 - \lambda) \geqslant 0$, iar $x_1', x_2', x_3' \geqslant 0$, $x_1'', x_2'', x_3'' \geqslant 0$, rezultă că avem și $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 \geqslant 0$, soluția $\bar{X}$ avînd componentele nenegative.

În consecință, $\bar{X} \in M$, adică mulțimea M este convexă, lucru pe care trebuia să îl demonstrăm.

Observații. 1. Unii dintre coeficienții funcției $f(X)$ pot fi nuli, deci se poate ca funcția să conțină mai puține variabile decît sistemul.

2. Renunțînd la condiția ca soluțiile sistemului să aibă componente nenegative, se poate demonstra o altă proprietate, și anume: mulțimea soluțiilor sistemului, care dau o valoare constantă unei funcții liniare, este convexă. Nu vom folosi, însă, această proprietate în aplicarea practică a acestor cunoștințe.

3. Dacă nu există nici o soluție cu componente nenegative, care să dea funcției $f(X)$ valoarea K, mulțimea M este vidă și teorema rămîne valabilă. Dacă există o singură soluție cu proprietățile cerute, mulțimea M are un singur element și este — de asemenea — convexă.

Consecințe. Mulțimea soluțiilor unui sistem de ecuații liniare, care au componentele nenegative și care dau unei funcții liniare o valoare maximă finită (respectiv o valoare minimă finită), este o mulțime convexă.

Concluzia acestei propoziții rezultă din teorema II.2.4. și din faptul că valoarea maximă (respectiv minimă) a funcției $f(X)$, în condițiile date, este unică. Mai precis, nu putem avea două valori maxime diferite, de exemplu $f(X_1) = 100$ și $f(X_2) = 125$, pentru că în acest caz $f(X_1)$ nu ar mai fi maximă.

Mulțimi poliedrale convexe. Fiind dat un sistem de inecuații liniare de forma $AX \leqslant b$ (adică cu toate inecuațiile avînd sensul $\leqslant$) respectiv de forma $AX \geqslant b$ (adică cu toate inecuațiile avînd sensul $\geqslant$), cititorul poate arăta, cu ușurință, că mulțimea soluțiilor lui este o mulțime convexă (justificarea seamănă cu cea de la sistemele de ecuații liniare). Legînd acestea de proprietățile cunoscute anterior, putem spune că mulțimea soluțiilor unui sistem combinat, de ecuații

Scanned with OKEN Scanner

liniare și de inecuații liniare (unele cu sensul $\leqslant$, iar altele cu sensul $\geqslant$) reprezintă o mulțime convexă. O astfel de mulțime poartă numele de *mulțime poliedrală convexă*.

Dacă o mulțime poliedrală convexă nu conține vectori cu componente nemărginite ce pot fi oricît de mari), spunem că ea este o mulțime poliedrală convexă mărginită, sau *poliedru convex*. Se poate arăta că, dacă un poliedru convex C are vîrfurile $V_1, V_2, \ldots V_p$, atunci orice vector $V \in C$ se poate scrie sub forma unei combinații liniare convexe a vîrfurilor mulțimii. Altfel spus, pentru orice $V \in C$:

$$(\exists)\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \geqslant 0, \quad \text{cu} \quad \sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1,$$

astfel încît:

$$V = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j V_j.$$

Exemplu. Fie sistemul de ecuații și inecuații liniare de forma:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 14, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

Există trei soluții de bază, ale sistemului format numai cu primele două ecuații și anume:

$X_1 = (0\ 6\ 4)^t$, corespunzătoare bazei: $B_1 = \{a_2, a_3\}$,
$X_2 = (2\ 0\ 6)^t$, corespunzătoare bazei: $B_2 = \{a_1, a_3\}$,
$X_3 = (-4\ 18\ 0)^t$, corespunzătoare bazei: $B_3 = \{a_1, a_2\}$.

Dintre acestea, numai primele două verifică și condiția de a avea toate componentele nenegative. Conform teoremei II.2.3., ele reprezintă singurele vîrfuri ale mulțimii soluțiilor sistemului dat. Pe de altă parte, această mulțime este evident mărginită, neputînd avea, de exemplu $x_1 > 0$ foarte mare (infinit), dacă $x_2 \geqslant 0$ și $x_3 \geqslant 0$, nici în prima, dar nici în a doua ecuație. În consecință, orice soluție a sistemului dat se poate scrie ca o combinație liniară convexă a celor două vîrfuri:

$$X = \lambda X_1 + (1 - \lambda) X_2, \text{ cu } \lambda \quad [0; 1]$$

De exemplu: $X_4 = (1\ 3\ 5) = \frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{2} X_2$, ceea ce se poate verifica ușor.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema II.2.5. Considerînd toate valorile unei funcții liniare, corespunzătoare mulțimii M, a soluțiilor cu componente nenegative, ale unui sistem de ecuații liniare, dacă nu există soluții pentru care funcția este nemarginită superior (respectiv nemărginită inferior), atunci există cel puțin un vîrf al mulțimii M, pentru care funcția ia cea mai mare valoare (respectiv cea mai mică valoare).

Vom face justificarea acestei proprietăți numai în cazul cînd mulțimea M este mărginită, adică este reprezentată printr-un poliedru convex. Cititorul poate găsi demonstrația generală în materialui bibliografic.

Pentru o desfășurare mai ușoară a calculelor, considerăm cazul particular cînd sistemul de ecuații liniare are numai trei variabile x_1, x_2 și x_3, iar mulțimea M numai patru vîrfuri, $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}$ și $X^{(4)}$.

Conform proprietății enunțate anterior, orice soluție $\bar{X}$, a sistemului, ce aparține mulțimii M, poate fi scrisă sub forma:

$$\bar{X} = \lambda_1 X^{(1)} + \lambda_2 X^{(2)} + \lambda_3 X^{(3)} + \lambda_4 X^{(4)}$$

cu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \lambda_4 \geqslant 0$, iar $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1$.

Vom nota:

$$X^{(1)} = (x_1^{(1)} \quad x_2^{(1)} \quad x_3^{(1)})^t,$$
$$X^{(2)} = (x_1^{(2)} \quad x_2^{(2)} \quad x_3^{(2)})^t,$$
$$X^{(3)} = (x_1^{(3)} \quad x_2^{(3)} \quad x_3^{(3)})^t,$$
$$X^{(4)} = (x_1^{(4)} \quad x_2^{(4)} \quad x_3^{(4)})^t.$$

Înlocuind în relația care dă soluția oarecare:

$$\bar{X} = (\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2 \quad \bar{x}_3)^t$$

se obțin cu ușurință egalitățile:

$$\begin{array}{l|l} \bar{x}_1 = \lambda_1 x_1^{(1)} + \lambda_2 x_1^{(2)} + \lambda_3 x_1^{(3)} + \lambda_4 x_1^{(4)} & c_1 \\ \bar{x}_2 = \lambda_1 x_2^{(1)} + \lambda_2 x_2^{(2)} + \lambda_3 x_2^{(3)} + \lambda_4 x_2^{(4)} & c_2 \\ \bar{x}_3 = \lambda_1 x_3^{(1)} + \lambda_2 x_3^{(2)} + \lambda_3 x_3^{(3)} + \lambda_4 x_3^{(4)} & c_3 \end{array}$$

Cu aceste egalități, valoarea funcției liniare, pentru soluția $\bar{X}$ oarecare, se calculează înmulțindu-le, respectiv, cu c_1, c_2, c_3 și adunînd relațiile rezultate.

Scanned with OKEN Scanner

Se obține:

$$f(\bar{X}) = c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 + c_3\bar{x}_3 = \lambda_1(c_1x_1^{(1)} + c_2x_2^{(1)} + c_3x_3^{(1)}) + \\ + \lambda_2(c_1x_1^{(2)} + c_2x_2^{(2)} + c_3x_3^{(2)}) + \lambda_3(c_1x_1^{(3)} + c_2x_2^{(3)} + c_3x_3^{(3)}) + \\ + \lambda_4(c_1x_1^{(4)} + c_2x_2^{(4)} + c_3x_3^{(4)}) = \lambda_1 \cdot f(X^{(1)}) + \lambda_2 \cdot f(X^{(2)}) + \\ + \lambda_3 \cdot f(X^{(3)}) + \lambda_4 \cdot f(X^{(4)}) = \sum_{j=1}^{4} \lambda_j f(X^{(j)}).$$

Să ne îndreptăm atenția asupra valorilor funcției date, în cele patru vîrfuri ale mulțimii M:

$$f(X^{(1)}),\ f(X^{(2)}),\ f(X^{(3)}),\ f(X^{(4)}).$$

Dintre acestea, cel puțin una va fi cea mai mare: fie ea $f(X^{(3)})$. Evident, dacă există, printre cele patru valori, două sau mai multe la fel de mari ca $f(X^{(3)})$, considerăm una dintre acestea, deci pe $f(X^{(3)})$.

Am presupus deci:

$$f(X^{(3)}) \geqslant f(X^{(1)});\ \ f(X^{(3)}) \geqslant f(X^{(2)});\ \ f(X^{(3)}) \geqslant f(X^{(4)}).$$

Ținînd seama de faptul că $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geqslant 0$, putem majora termenii descompunerii funcției $f(X)$, obținută mai sus, astfel:

$$f(\bar{X}) = \lambda_1 f(X^{(1)}) + \lambda_2 f(X^{(2)}) + \lambda_3 f(X^{(3)}) + \lambda_4 f(X^{(4)}) \leqslant \\ \leqslant \lambda_1 f(X^{(3)}) + \lambda_2 f(X^{(3)}) + \lambda_3 f(X^{(3)}) + \lambda_4 f(X^{(3)}).$$

Dînd aici factor comun pe $f(X^{(3)})$ și ținînd seama de faptul că:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1,$$

deducem că:

$$f(\bar{X}) \leqslant f(X^{(3)}).$$

Amintindu-ne că soluția $\bar{X}$ este una oarecare din mulțimea M, putem preciza că $F(X^{(3)})$ nu este numai valoarea maximă a funcției, pentru cele patru vîrfuri considerate, ci și valoarea maximă a funcției, pentru toate soluțiile din mulțimea M, proprietatea fiind complet justificată. Asemănător se poate face justificarea și în cazul cînd se urmărește valoarea minimă a funcției $f(X)$ pentru mulțimea M.

Exemplu. Fie sistemul de două ecuații liniare, cu cinci necunoscute:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 40, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 60, \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care ne interesează mulțimea soluțiilor cu toate componentele nenegative, pe care o notăm cu M.

Fie — de asemenea — următoarea funcție liniară:

$$f(X) = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3.$$

Vom încerca să găsim valoarea maximă, respectiv, valoarea minimă, a funcției $f(X)$, pentru $X \in M$. Pentru aceasta, vom determina — mai întîi — toate soluțiile de bază, ale sistemului dat, folosind metoda Gauss-Jordan. Acest lucru este realizat în tabelul II.2.3., luîndu-se inițial ca bază, baza unitară $B_1 = \{a_4, a_5\}$.

Tabelul II.2.3.:

Baza	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b	
$\leftarrow a_4$	1	1	2	1	0	40	
a_5	3	1	4	0	1	60	(S_1)
a_1	1	1	2	1	0	40	
$\leftarrow a_5$	0	—2	—2	—3	1	—60	(S_2)
a_1	1	0	1	—1/2	1/2	10	
$\leftarrow a_2$	0	1	1	3/2	—1/2	30	(S_3)
$\leftarrow a_1$	1	—1	0	—2	1	—20	
a_3	0	1	1	3/2	—1/2	30	(S_4)
a_2	—1	1	0	2	—1	20	
$\leftarrow a_3$	1	0	1	—1/2	1/2	0	(S_5)
a_2	3	1	4	0	1	60	
$\leftarrow a_4$	—2	0	—2	1	—1	—20	(S_6)
$\leftarrow a_2$	1	1	2	1	0	40	
a_5	2	0	2	—1	1	20	(S_7)
a_3	1/2	1/2	1	1/2	0	20	
$\leftarrow a_5$	1	—1	0	—2	1	—20	(S_8)
$\leftarrow a_3$	3/4	1/4	1	0	1/4	15	
a_4	—1/2	1/2	0	1	—1/2	10	(S_9)
a_1	1	1/3	4/3	0	1/3	20	
a_4	0	2/3	2/3	1	—1/3	20	(S_{10})

În acest tabel s-au obținut toate cele zece soluții de bază ale sistemului, dintre care numai șase au componentele nenegative. Aceste șase soluții de bază sînt — conform teoremei II.2.3. — vîrfurile mulțimii M. Ele sînt trecute în tabelul II.2.4.; pentru fiecare dintre ele s-a trecut în acest tabel și valoarea funcției $f(X)$.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul II.2.4.:

Soluția	Secțiunea	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Valoarea funcției
X_1	S_1	0	0	0	40	60	0
X_2	S_3	10	30	0	0	0	90
X_3	S_5	0	20	10	0	0	90
X_4	S_7	0	40	0	0	20	80
X_5	S_9	0	0	15	10	0	75
X_6	S_{10}	20	0	0	20	0	60

Conform teoremei II.2.5., valoarea maximă a funcției $f(X)$, pentru $X \in M$, este egală cu 90, fiind atinsă pentru soluțiile de bază X_2 și X_3. De asemenea, valoarea minimă a funcției $f(X)$, pentru $X \in M$, este egală cu zero, fiind atinsă pentru soluția X_1. Pe de altă parte, conform consecinței teoremei II.2.4., orice soluție obținută cu formula:

$$X = \lambda X_2 + (1 - \lambda)X_3, \quad \lambda \in [0; 1],$$

este de asemenea o soluție care dă funcției $F(X)$ valoarea maximă.

Luînd — de exemplu — $\lambda = \frac{1}{5}$, obținem soluția: $X = (2\ 22\ 8\ 0\ 0)^t$, care dă funcției $f(X)$ — de asemenea — valoarea 90 (valoare maximă, în condițiile date).

Cititorul poate găsi și alte exemple de acest fel.

Probleme rezolvate:

1. Să se determine un determinant principal al matricei:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare. Fie minorul: $D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$

Prin bordarea lui cu cîte o linie și o coloană, obținem determinanții:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Deoarece acești determinanți sînt nuli, avem: rang $A = 2$. În consecință, D_1 este un determinant principal.

Scanned with OKEN Scanner

2. Fie următorul sistem de trei ecuații liniare, cu patru necunoscute, în care m este un parametru real.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 30, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 60, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = m. \end{cases}$$

a. Să se discute compatibilitatea sau incompatibilitatea sistemului, în raport cu valorile parametrului m.

b. Pentru valoarea lui m, pentru care sistemul este compatibil, să se rezolve sistemul, dînd soluția generală. Se vor scrie și trei soluții particulare.

Rezolvare a. Matricea sistemului este:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculul următorilor determinanți:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

conduce la concluzia că rangul matricei A este egal cu 2 (doi).

Matricea extinsă este:

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 30 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 60 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & m \end{pmatrix}.$$

Pentru calculul rangului ei, pornim tot de la minorul D_1. Prin bordarea lui se obțin determinanții D_2 și D_3, care sînt nuli, precum și determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 30 \\ 1 & 4 & 60 \\ 2 & 5 & m \end{vmatrix} = m - 30.$$

Pentru valoarea $m = 30$, acest determinant este nul, deci rangul matricei extinse este egal tot cu doi, sistemul fiind compatibil.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru orice altă valoare a lui m (adică pentru $m \neq 30$), avem $D_4 \neq 0$, adică rang $A_e = 3$ și sistemul dat este incompatibil.

b. Pentru $m = 30$, luăm ca determinant principal pe D_1, deci:

— primele două ecuații sînt principale;

— x_1 și x_2 sînt necunoscute principale.

Vom rezolva deci, în raport cu x_1 și x_2, sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 30 - x_3 - 2x_4 \\ x_1 + 4x_2 = 60 - 2x_3 - 3x_4 \end{cases}$$

Prin scăderea acestor două ecuații, obținem direct:

$$x_2 = 30 - x_3 - x_4,$$

iar apoi, prin înlocuirea lui x_2 (în prima ecuație, de exemplu):

$$x_1 = -60 + 2x_3 + x_4.$$

Astfel, soluția generală a sistemului este următoarea:

$$\begin{cases} x_1 = -60 + 2x_3 + x_4, \\ x_2 = 30 - x_3 - x_4. \end{cases}$$

Valorile pentru x_3 și x_4 putînd fi alese în mod arbitrar. Iată — ca exemplu — trei soluții particulare:

— pentru $x_3 = 0$ și $x_4 = 1$. avem:

$$x_1 = -59 \text{ și } x_2 = 29.$$

Deci: $X_1 = (-59\ 29\ 0\ 1)^t$

— pentru $x_3 = 1$ și $x_4 = 1$, avem:

$$x_1 = -57 \text{ și } x_2 = 28.$$

Deci: $X_2 = (-57\ 28\ 1\ 1)^t$.

— pentru $x_3 = 1$ și $x_4 = 0$, avem:

$$x_1 = -58 \text{ și } x_2 = 29.$$

Deci: $X_3 = (-58\ 29\ 1\ 0)^t$.

3. Fie următorul sistem, de trei ecuații liniare, cu patru necunoscute:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 36, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 18. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Notînd coloanele matricei A, a sistemului, cu a_1, a_2, a_3 și a_4, să se determine soluția de bază a sistemului, corespunzătoare bazei $B = \{a_1, a_2, a_3\}$.

Rezolvare. Matricea A este următoarea, coloanele ei fiind notate deasupra:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \end{array}.$$

Verificăm faptul că sistemul B reprezintă o bază în R^3, prin calculul următorului determinant:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$$

Variabilele bazice, ale soluției căutate, sînt x_1, x_2 și x_3. Variabila nebazică x_4 va avea o valoare nulă în soluția de bază căutată, deci $x_4 = 0$. Înlocuind în sistem, rămîne să rezolvăm încă următorul sistem de trei ecuații cu trei necnoscute, al cărui determinant este diferit de zero (a fost calculat mai sus):

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 36, \\ 2x_1 + x_2 = 18. \end{cases}$$

Se obține: $x_1 = 7$; $x_2 = 4$; $x_3 = 21$, deci soluția de bază cerută este:

$$X = (7 \quad 4 \quad 21 \quad 0)^t.$$

4. Să se determine toate soluțiile de bază ale următorului sistem liniar:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 15, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 - 2x_5 = 30, \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 45. \end{cases}$$

Rezolvare. Aplicînd metoda Gauss-Jordan, obținem tabelul II.2.5., care conține 12 secțiuni. Astfel, pornind de la baza unitară $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul II.2.5.

Baza	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b	e_1	e_2	e_3	
$\leftarrow e_1$	1	1	1	0	1	15	1	0	0	
a_2	2	2	0	1	−2	30	0	1	0	(S_0)
a_3	1↑	0	1	1	1	45	0	0	1	
a_1	|1|	1	1	0	1	15	1	0	0	
e_2	0	0	−2	1	−4	0	−2	1	0	(S_1)
$\leftarrow e_3$	0	|−1|	0	1	0	30	−1	0	1	
a_1	1	0	1	1	1	45	0	0	1	
$\leftarrow e_2$	0	0	|−2|	1	−4	0	−2	1	0	(S_2)
a_2	0	1	0↑	−1	0	−30	1	0	−1	
a_1	1	0	0	3/2	−1	45	−1	1/2	1	
$\leftarrow a_3$	0	0	1	|−1/2|	2	0	1	−1/2	0	(S_3)
a_2	0	1	0	−1↑	0	−30	1	0	−1	
a_1	1	0	3	0	5	45	2	−1	1	
$\leftarrow a_4$	0	0	−2	1	|−4|	0	−2	1	0	(S_4)
a_2	0	1	−2	0	−4↑	−30	−1	1	−1	
a_1	1	0	1/2	5/4	0	45	−1/2	1/4	1	
a_5	0	0	1/2	−1/4	1	0	1/2	−1/4	0	(S_5)
$\leftarrow a_2$	0	1	0	|−1|↑	0	−30	1	0	−1	
a_1	1	5/4	1/2	0	0	15/2	3/4	1/4	−1/4	
$\leftarrow a_5$	0	−1/4	|1/2|	0	1	15/2	1/4	−1/4	1/4	(S_6)
a_4	0	−1	0↑	1	0	30	−1	0	1	
$\leftarrow a_1$	1	|3/2|	0	0	−1	0	1/2	1/2	−1/2	
a_3	0	−1/2	1	0	2	15	1/2	1/2	1/2	(S_7)
a_4	0	−1	0	1	0	30	−1	0	1	
a_2	2/3	1	0	0	−2/3	0	1/3	1/3	−1/3	
a_3	1/3	0	1	0	5/3	15	2/3	−1/3	1/3	(S_8)
a_4	2/3	0	0	1	|−2/3|↑	30	−2/3	1/3	2/3	
a_2	0	1	0	−1	0	−30	1	0	−1	
$\leftarrow a_3$	2	0	1	|5/2|	0	90	−1	1/2	2	(S_9)
a_5	−1	0	0	−3/2	1	−45	1	−1/2	−1	
$\leftarrow a_2$	4/5	1	|2/5|	0	0	6	3/4	1/5	−1/5	
a_4	4/5	0	2/5	1	0	36	−2/5	1/5	4/5	(S_{10})
a_5	1/5	0	3/5	0	1	9	2/5	−1/5	1/5	
a_3	2	5/2	1	0	0	15	3/2	1/2	−1/2	
a_4	0	−1	0	1	0	30	−1	0	1	(S_{11})
a_5	−1	−3/2	0	0	1	0	−1/2	−1/2	1/2	

Scanned with OKEN Scanner

Începînd din secțiunea (S_3) se găsesc descompunerile tuturor vectorilor în diferite baze, ce se pot forma cu coloane ale matricei A. Trecerile — de la o bază la alta — au fost făcute astfel încît să apară toate bazele posibile, dar pivoții să fie cît mai comozi pentru calcul.

După cum se vede din tabel, există în total nouă baze diferite, care se pot forma cu coloane ale matricei A, sistemul $\{a_1, a_3, a_5\}$ neformînd bază în R^3. Cercetînd cu atenție secțiunile corespunzătoare acestor nouă baze, se observă că unele soluții de bază coincid (cînd sînt degenerate), astfel încît există în realitate numai cinci soluții de bază distincte, care sînt trecute în tabelul II.2.6.

Tabelul II.2.6.

Soluție	Secțiunile	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
X_1	s_3, s_4, S_5	45	—30	0	0	0
X_2	S_6	15/2	0	0	30	15/2
X_3	$S_7, S_8 S_{11}$	0	0	15	30	0
X_4	S_9	0	—30	90	0	—45
X_5	S_{10}	0	0	0	36	9

Dintre soluțiile de bază, X_1 și X_3, sînt degenerate (au numai cîte două componente diferite de zero).

Probleme date spre rezolvare

5. Să se cerceteze compatibilitatea sau incompatibilitatea următorului sistem liniar, iar în caz de compatibilitate să se rezolve:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = 60, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 15, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 95. \end{cases}$$

Răspuns:

Sistemul este compatibil, iar soluția generală este:

$$\begin{cases} x_1 = 25 + x_3 - 2x_4, \\ x_2 = 10 - 2x_3 + 3x_4. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

6. Să se arate că toate ecuațiile următorului sistem liniar sînt principale, calculîndu-se cel puțin o soluție de bază a lui:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 20, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 30, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 30. \end{cases}$$

Indicație și răspuns. Se găsește că: rang $A = 3$. O soluție de bază corespunde, de pildă, bazei $B = \{a_2, a_3, a_4\}$, ea fiind:

$$X = (0 \ 15 \ 5 \ -5)^t.$$

7. Să se determine toate soluțiile de bază, ale sistemului liniar:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 12, \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 24, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 36. \end{cases}$$

Răspuns. Există cinci baze posibile, dar numai trei soluții de bază și anume:

$$X_1 = (24 \quad -12 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^t;$$
$$X_2 = (0 \quad 0 \quad 12 \quad 0 \quad 0)^t;$$
$$X_3 = (0 \quad -12 \quad 0 \quad 12 \quad 0)^t.$$

8. Fie sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 54, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 45, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 90. \end{cases}$$

a. Cîte baze diferite se pot forma cu coloanele matricei A, a sistemului dat?

b. Să se determine soluțiile de bază ale sistemului, corespunzătoare bazelor $B_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$; $B_2 = \{a_1, a_2, a_5\}$; $B_3 = \{a_1, a_3, a_5\}$.

Răspuns. a. Nouă. b. $X_1 = (9 \ 18 \ 9 \ 0 \ 0)^t$; $X_2 = (-9 \ 45/2 \ 0 \ 0 \ 81/2)^t$; $X_3 = (81 \ 0 \ 45 \ 0 \ -162)^t$.

9. Fie sistemul de ecuații liniare, nedeterminat:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 25, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 30. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

a. Să se determine toate soluțiile de bază, ale sistemului dat.

b. Care este mulțimea K, a tuturor soluțiilor de bază, ale sistemului dat, care au toate componentele nenegative?

c. Care este valoarea maximă, respectiv valoarea minimă, a funcției: $f(X) = 4x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4$, pentru diferite soluții ale sistemului, cu toate componentele nenegative?

d. Să se determine și alte soluții ale sistemului, cu componentele nenegative, care să dea funcției $f(X)$ valoarea maximă.

Răspuns. a. $X_1 = (-5\ 35\ 0\ 0)^t$; $X_2 = (-5\ 0\ 35/2\ 0)^t$;
$X_3 = (0\ 0\ 0\ 7)^t$; $X_4 = (0\ 45/2\ 0\ 5/2)^t$;
$X_5 = (0\ 0\ -45/4\ 5/2)^t$.

b. $K = \{X_3, X_4, X_5\}$.

c. $[\max]\ f(x) = 105$;
$[\min]\ f(X) = 78$.

d. Orice $X = \lambda X_4 + (1 - \lambda)X_5$, cu $\lambda \in (0, 1)$.

II.3. Două aplicații de interes practic

A. Probleme de repartizare

Într-o problemă de alocare de tip „repartizare", intervin n resurse, $R_1, R_2, \ldots, R_n$, care trebuie repartizate la n activități, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, astfel încît.

— fiecare resursă să fie repartizată la cîte o singură activitate:

— fiecărei activități să i se repartizeze cîte o singură resursă.

Evident că o astfel de repartizare se poate face în mai multe feluri, alegerea trebuind să se facă după un criteriu. În acest scop, se iau în considerare „costurile" c_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, corespunzătoare fiecărei posibilități de repartizare a resurselor R_i pe activitățile A_j. Pentru fiecare repartizare a celor n resurse va corespunde în acest fel cîte un cost total, alegerea unei anumite repartizări urmînd să se facă în așa fel încît costul total atașat ei să fie cît mai mic sau cît mai mare (în funcție de natura problemei practice ce se rezolvă).

Observație. Termenul de cost" atașat unei perechi (R_i, A_j) are un sens larg, de valoare atașată acestei perechi (a nu se confunda „cost" cu „cheltuială"). În problemele practice, costurile pot avea diferite interpretări, ca de exemplu:

Scanned with OKEN Scanner

consum de timp, cheltuială bănească, procentaj de rebuturi, beneficiu net unitar, randament, preferința exprimată cantitativ etc. Este clar că primele trei exemple date aici vor conduce la probleme de minim, iar celelalte trei, la probleme de maxim.

Datele unei probleme de repartizare se pot scrie într-un tabel pătrat, *numit matricea costurilor*, de forma celei din tabelul II.1.1. În cele ce urmează, pentru simplificarea scrierii, la un astfel de tabel nu vom mai scrie simbolurile ce reprezintă resursele și activitățile, acestea fiind subînțelese.

Tabelul II.3.1.

C:

R_i \ A_j	A_1	A_2 ...	A_n
R_1	c_{11}	c_{12} ...	c_{1n}
R_2	c_{21}	c_{22} ...	c_{2n}
.	.	. ...	.
.	.	. ...	.
.	.	. ...	.
R_n	c_{n1}	c_{n2} ...	c_{nn}

Pentru a scrie modelul matematic al unei probleme de repartizare optimă, fixăm n^2 variabile de decizie, pe care le notăm cu x_{ij}, $i, j, = 1, 2, ..., n$. Aceste variabile se pot scrie într-un tabel pătrat de forma tabelului II.1.2, notat matricial cu simbolul X.

Tabelul II.3.2.

X:

R_i \ A_j	A_1	A_2 ...	A_n
R_1	x_{11}	x_{12} ...	x_{1n}
R_2	x_{21}	x_{22} ...	x_{2n}
.	.	. ...	.
.	.	. ...	.
.	.	. ...	.
R_n	x_{n1}	x_{n2} ...	x_{nn}

Convenim ca variabilele fixate (necunoscutele problemei) să poată lua numai valori egale cu zero sau cu unu, astfel încît:

$x_{ij} = 1$, dacă resursa R_i este repartizată activității A_j,
$x_{ij} = 0$, dacă reursa R_i nu este repartizată activității A_j.

Scanned with OKEN Scanner

Cu aceste notații, să scriem modelul matematic al problemei. Faptul că prima resursă trebuie să fie afectată (repartizată) unei singure activități este echivalent cu verificarea egalității:

$$x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = 1$$

Într-adevăr, în condițiile impuse valorilor x_{ij}, egalitatea nu poate avea loc decît dacă un termen este egal cu unu, iar toți ceilalți sînt egali cu zero. De exemplu, dacă $x_{11} = 1$, $x_{12} = 0, \ldots, x_{1n} = 0$, înseamnă că resursa R_1 este afectată activității A_1, resursa R_1 nu este afectată activității A_2 ș.a.m.d., resursa R_1 nu este afectată activității A_n. De asemenea, dacă $x_{12} = 1$, $x_{11} = 0, \ldots, x_{1n} = 0$, resursa R_1 este afectată activității A_2, ea nemaifiind afectată nici unei alte activități. Analog, faptul că resursa R_2 trebuie să fie afectată unei singure activități este echivalent cu verificarea egalității:

$$x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = 1.$$

Tot așa se scriu și condițiile ca fiecare dintre celelalte resurse să fie afectată cîte unei singure activități. Astfel, primul grup de restricții (condiții ce trebuiesc verificate de variabilele x_{ij}) ale modelului matematic, corespunzător problemei pe care o rezolvăm, este următorul:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = 1, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nn} = 1. \end{cases}$$

Acest grup de egalități poate fi scris condensat, astfel:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \text{ pentru } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Grupul de restricții scris mai sus, nu este suficient pentru a exprima condițiile problemei. Pentru a explica acest lucru este suficient să arătăm că o soluție a ei este și următoarea: $x_{11} = x_{21} = \ldots = x_{n1} = 1$, celelalte valori fiind nule, ceea ce înseamnă că toate resursele sînt afectate aceleiași activități, A_1, fapt care nu este permis. De aceea, mai este necesar să scriem un grup de restricții care să impună ca fiecărei activități să-i fie repartizată cîte o singură resursă.

Scanned with OKEN Scanner

Faptul că activității A_1 i se repartizează o singură resursă este echivalent cu verificarea egalității:

$$x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{n1} = 1$$

Într-adevăr, dacă în această egalitate $x_{11} = 1$ și cele alte sînt nule, înseamnă că activității A_1 i s-a repartizat resurse R_1 și numai ea. Asemănător se scriu și celelalte restricții din grupul al doilea, acest grup luînd forma următoare:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{n1} = 1, \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{n2} = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{nn} = 1. \end{cases}$$

Condensat, acest grup se scrie astfel:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \text{ pentru } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Pe de altă parte, costul total atașat unei repartizări carecare, X, scrisă în general în tabelul II.1.2, se calculează evident, cu formula:

$$\begin{aligned} z = {} & (c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n}) + \\ & + (c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n}) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (c_{n1}x_{n1} + c_{n2}x_{n2} + \ldots + c_{nn}x_{nn}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_i. \end{aligned}$$

Evident, această sumă se reduce la suma acelor costuri c_{ij}, care corespund la valori $x_{ij} = 1$.

Strîngînd cele de mai sus, modelul matematic al problemei de repartizare este următorul:

$$(M)\begin{cases} [\text{extr}]\ z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{ pentru } i = 1, 2, \ldots, n, \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{ pentru } j = 1, 2, \ldots, n, \\ x_{ij} \in \{0, 1\},\ i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, n, \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

valoarea extremă fiind reprezentată la unele modele prin cea maximă, iar la alte modele, prin cea minimă.

Observație. Urmărind condițiile problemei și modul de scriere a restricțiilor, deducem că o soluție X a sistemului de restricții este formată dintr-o matrice pătrată, ale cărei elemente sînt egale cu zero, cu excepția a n dintre ele, care sînt egale cu unu. Aceste elemente egale cu unu sînt dispuse în matrice, astfel încît pe fiecare linie a matricei se află unul singur dintre ele, iar pe fiecare coloană a matricei se află, de asemenea, unul singur dintre ele. Funcția z, numită și *funcție de eficiență*, este reprezentată deci de suma a n valori c_{ij}, extrase din matricea costurilor C, astfel încît ele se găsesc în această matrice, cîte una singură pe fiecare linie și cîte una singură pe fiecare coloană.

Exemplu. Fie problema de repartizare, cu datele din tabelul II.3.3.

Tabelul II.3.3.

3	2	5
5	5	3
5	4	2

Dăm, mai întîi, cîteva interpretări ale acestor date, sub forma a trei probleme concrete, pentru a ne referi la ele în viitoarea rezolvare:

(i_1) Pentru prelucrarea unui anumit tip de piese, trebuie făcută o repartizare a trei muncitori, notați simbolic cu R_1, R_2 și R_3, pe trei mașini, notate cu A_1, A_2, A_3, așa încît pe fiecare mașină să lucreze cîte un singur muncitor. Valorile c_{ij} din tabel reprezintă, în acest caz, numerele medii de piese rebutate la mia de piese prelucrate de fiecare muncitor, atunci cînd el lucrează pe fiecare mașină, aceste numere depinzînd de calificarea și îndemînarea muncitorilor respectivi, în raport cu mașinile în cauză. Astfel, de exemplu, dacă muncitorul R_1 lucrează pe mașina A_1, el dă în medie, 3‰ piese rebutate, dacă același muncitor lucrează pe mașina A_2 el dă în medie, 2‰ piese rebutate, iar dacă el lucrează pe mașina A_3, dă 5‰ piese rebutate. Este necesar să se determine o repartizare a muncitorilor pe mașini, care să asigure un procentaj minim de rebuturi pe întreg ansamblul celor trei mașini.

Scanned with OKEN Scanner

(i_2) Trei depozite, notate cu R_1, R_2, R_3, trebuie să aprovizioneze trei magazine, A_1, A_2, A_3 în așa fel încît fiecare magazin să se aprovizioneze de la un singur depozit. Valorile c_{ij} din tabel reprezintă, de această dată, distanțele corespunzătoare de la fiecare depozit R_i, $i = 1, 2, 3$, la fiecare magazin A_j, $j = 1, 2, 3$. Astfel, de exemplu, distanța de la R_1 la A_1 este de 3 unități de distanță, de la R_1 la A_2 este de 2 unități de distanță ș.a.m.d. Trebuie făcută o asemenea repartizare a depozitelor, încît suma distanțelor ce trebuie parcurse pentru aprovizionarea celor trei magazine, să fie minimă.

(i_3) Trei tipuri de produse, A_1, A_2, A_3, pot fi fabricate de trei întreprinderi, R_1, R_2, R_3. Conform condițiilor de aprovizionare și organizare a celor trei întreprinderi, ele obțin beneficii unitare nete diferite, la fabricarea unui același produs: s-a notat cu c_{ij} beneficiul net realizat de întreprinderea R_1 pentru o unitate din produsul A_j. Se convine să se planifice fabricarea produselor astfel încît fiecare întreprindere să producă cîte un singur tip. Cum să se facă repartizarea produselor pe cele trei întreprinderi, astfel încît beneficiul net total ce se realizează să fie maxim, dacă trebuie să se fabrice cantități egale din cele trei tipuri de produse?

Deoarece dimensiunile problemei de repartizare puse mai sus sînt mici, o putem rezolva și printr-o cercetare directă a tuturor posibilităților de repartizare a ansamblului de resurse. Pentru aceasta, vom numi *cuplaj* resurse-activități, o aranjare a resurselor și activităților în trei perechi de forma (R_i, A_j), oricare două perechi dintre acestea diferind atît prin indicii resurselor, cît și prin indicii activităților. Astfel, de exemplu, perechile (R_1, A_2) și (R_3, A_1) pot să aparțină la unul din cuplaje, deoarece ele conțin atît resurse diferite, cît și activități diferite. În schimb, perechile (R_2, A_1) și (R_3, A_1) nu pot să aparțină la același cuplaj, deoarece ele conțin aceeași activitate (și nu poate afecta două resurse diferite pe o singură activitate). Este clar că numărul de cuplaje distincte arată cîte posibilități de repartizare a ansamblului de resurse există, în condițiile problemei puse.

Să observăm că în orice cuplaj putem înșirui perechile astfel încît indicii resurselor să fie în ordine naturală. De exemplu, perechile (R_2, A_1), (R_3, A_3), (R_1, A_2), ce formează un cuplaj, se pot scrie în ordinea (R_1, A_2), (R_2, A_1), (R_3, A_3), prima pereche avînd resursa R_1, a doua pereche resursa R_2 și cea de a treia pereche resursa R_3. Evident, acti-

Scanned with OKEN Scanner

vităţile corespunzătoare acestor trei perechi sînt distincte pe locul al doilea apărînd A_1, A_2 şi A_3, într-o anumită ordine. În acest fel, ordinea perechilor într-un cuplaj fiind impusă de indicii resurselor, putem preciza că numărul cuplajelor distincte este dat de numărul posibilităţilor de aranjare a activităţilor, pe cele trei locuri libere de mai jos:

$$(R_1, \ldots), \ (R_2, \ldots), \ (R_3, \ldots).$$

Recunoaştem aici numărul permutărilor de trei elemente, cele trei activităţi putîndu-se aşeza în următoarele $3! = 6$ moduri, pe locurile libere:

$A_1, A_2, A_3,$ $\quad$ $A_2, A_1, A_3,$ $\quad$ $A_3, A_1, A_2,$
$A_1, A_3, A_2,$ $\quad$ $A_2, A_3, A_1,$ $\quad$ $A_3, A_2, A_1.$

Generalizînd raţionamentul de mai sus, deducem că, pentru o problemă de repartizare cu n resurse şi n activităţi există $n!$ cuplaje, adică $n!$ posibilităţi de a asocia cele n resurse cu cele n activităţi, în condiţiile impuse de problema discutată.

Revenind la exemplul numeric de mai sus, vom scrie în tabelul II.3.4 toate cele şase cuplaje posibile, calculînd de fiecare dată şi costurile totale ataşate acestora. Calculul costurilor totale, corespunzătoare, s-a făcut ţinînd seama de faptul că fiecărei perechi (R_i, A_j) îi corespunde un element c_{ij} al matricei C. Dăm un exemplu în acest sens şi anume calculul costului total al celui de al treilea cuplaj din tabel:

Tabelul II.3.4

Nr. crt.	Cuplaj	Costul total corespunzător
1.	$(R_1, A_1), (R_2, A_2), (R_3, A_3)$	$3 + 5 + 2 = 10$
2.	$(R_1, A_1), (R_2, A_3), (R_3, A_2)$	$3 + 3 + r = 10$
3.	$(R_1, A_2), (R_2, A_1), (R_3, A_3)$	$2 + 5 + 2 = 9$
4.	$(R_1, A_2), (R_2, A_2), (R_3, A_1)$	$2 + 3 + 5 = 10$
5.	$(R_1, A_3), (R_2, (A_1), (R_3, A_2)$	$5 + 5 + 4 = 14$
6.	$(R_1, A_3), (R_2, A_2), (R_3, A_1)$	$5 + 5 + 5 = 15$

— perechii (R_1, A_2) îi corespunde costul 2 de pe linia întîia şi coloana a doua a matricei C,

— perechii (R_2, A_1) îi corespunde costul 5 de pe linia a doua şi coloana întîia a matricei C,

— perechii (R_3, A_3) îi corespunde costul 2, de pe linia a treia şi coloana a treia a matricei,

Scanned with OKEN Scanner

— suma celor trei costuri, extrase mai sus, este $2 + 5 + 2 = 9$, ea reprezentînd costul total atașat cuplajului considerat.

Cercetînd tabelul ce conține toate cele șase cuplaje posibile, observăm că dintre acestea, cel de al treilea are costul total cel mai mic, iar ultimul are costul total cel mai mare. Referindu-ne la cele trei texte, date ca eventuale interpretări ale problemei de repartizare, putem deci spune că (i_1) și (i_2) au ca soluții optime al treilea cuplaj din tabel, iar (i_3) are ca soluție optimă ultimul cuplaj din tabel.

Iată, mai întîi, decizia optimă ce urmează a se adopta, în cazul textului (i_1):

— corespunzător perechii (R_1, A_2), muncitorul R_1 va fi repartizat pe mașina A_2;

— corespunzător perechii (R_2, A_1), muncitorul R_2 va fi repartizat pe mașina A_1;

— corespunzător perechii (R_3, A_3), muncitorul R_3 va fi repartizat pe mașina A_3.

Costul total, corespunzător acestei repartizări, este egal cu 9. Aceasta înseamnă că la 3 000 de piese lucrate de cei trei muncitori, vor exista în medie, 9 rebuturi, pe întreg ansamblul celor trei mașini apărînd $3^0/_{00}$ piese rebutate.

Aceeași repartizare se poate interpreta ca soluție optimă a problemei puse în textul (i_2) impunînd ca:

— depozitul R_1 să aprovizioneze magazinul A_2,
— depozitul R_2 să aprovizioneze magazinul A_1,
— depozitul R_3 să aprovizioneze magazinul A_3.

În acest fel, suma distanțelor ce trebuie parcurse în scopul aprovizionării este minimă și egală cu 9 unități de distanță.

În sfîrșit, pentru problema pusă în textul (i_3), fiind vorba de un beneficiu total net maxim, soluția optimă este reprezentată prin cel de al șaselea cuplaj din tabel, ea interpretîndu-se astfel:

— întreprinderea R_1 urmează să fabrice produsul A_3,
— întreprinderea R_2 urmează să fabrice produsul A_2,
— întreprinderea R_3 urmează să fabrice produsul A_1.

Cu această repartizare, beneficiul total, realizat prin fabricarea cîte unei unități din fiecare tip de produs, este maxim și egal cu 15 u.b. (unități bănești).

Să considerăm acum cazul general al problemei de repartizare, în aplicațiile practice existînd, de obicei, un număr

Scanned with OKEN Scanner

mare de resurse și activități. Se știe că $n!$ crește foarte repede odată cu n, astfel încît metoda de rezolvare aplicată mai sus, prin cercetarea tuturor posibilităților de repartizare, devine inaccesibilă chiar la valori relativ mici ale numărului de resurse și activități (de exemplu, $8! = 40\,320$). De aceea, trebuie găsită o metodă prin care să poată fi aflată în mod direct soluția optimă, fără a cerceta și alte soluții posibile. Pentru fixarea ideilor, vom presupune că problema de repartizare, ce urmează a fi rezolvată, cere minimul funcției de eficiență, cazul de maxim putîndu-se reduce la acesta, așa cum vom arăta ulterior. De asemenea, pentru ilustrarea raționamentului, folosim datele numerice din exemplul anterior, cititorul putînd apoi face o generalizare a demonstrației.

Pornim de la observația că, dacă matricea costurilor ar avea multe elemente egale cu zero, existînd cel puțin cîte un zero pe fiecare linie și pe fiecare coloană, putem avea șansa să găsim un cuplaj pentru care toate costurile corespunzătoare perechilor să fie nule. Un astfel de cuplaj ar da, evident, o soluție optimă pentru problema noastră, dacă matricea costurilor nu conține valori strict negative. Explicăm, în continuare, pașii unei metode ce folosește o asemenea observație, numită *algoritmul ungar (Kuhn-Egerváhry)*.

Pasul 1. Încercăm să înlocuim matricea C dată, cu o altă matrice, cu elementele nenegative și cu multe zerouri (așa cum am arătat), dar astfel încît cuplajul care dă repartizarea optimă să se păstreze (cu excepția costului total corespunzător). În acest scop, aplicăm succesiv o serie de operații de înlocuire a matricei C, operații care au proprietățile menționate.

Lema II.3.1. Dacă din toate elementele unei linii a matricei C se scade același număr k, costurile totale corespunzătoare tuturor cuplajelor scad cu valoarea k.

Justificarea acestei leme se bazează pe o proprietate cunoscută din aritmetică și anume: dacă micșorăm unul dintre termenii unei sume neefectuate cu k unități, suma se micșorează cu k unități. Într-adevăr, valoarea totală a unui cuplaj oarecare este o sumă de valori c_{ij}, ce conține o valoare și numai una din linia pe care s-a efectuat modificarea.

Pentru aplicarea proprietății date, fixîndu-ne atenția asupra unei linii pe care vrem să facem modificarea indicată, scădem din toate elementele ei, pe cel mai mic dintre ele (*minorantul* liniei). În acest fel, asigurăm apariția a cel puțin un zero pe această linie, precum și faptul că nu apar elemente

Scanned with OKEN Scanner

strict negative pe linia respectivă. Evident, operații asemănătoare vom aplica asupra tuturor liniilor, pentru a asigura cel puțin cîte un zero pe fiecare linie. Astfel, valorile tuturor cuplajelor vor scădea cu suma minoranților liniilor din matricea C inițială.

Exemplu: Lunînd ca punct de plecare matricea C din tabelul II.3.3, să scădem cîte două unități din cele trei elemente ale primei linii (doi este cel mai mic element al acestei linii), ca în tabelul II.3.5.

Tabelul II.3.5.

C:

3	2	5	−2
5	4	3	
5	4	2	

$\rightarrow C_1$:

1	0	3
5	5	3
5	4	2

Valorile totale ale celor șase cuplaje posibile scad cu cîte două unități, așa cum se observă în calculele următoare, θ_i fiind vechile valori, iar θ_i' valorile noi ale cuplajelor corespunzătoare:

1) $(R_1, A_1), (R_2, A_2), (R_3, A_3)$: $\theta_1 = \underline{3} + 5 + 2 = 10$, $\theta_1' = 1 + 5 + 2 = 8$,

2) $(R_1, A_1), (R_2, A_3), (R_3, A_2)$: $\theta_2 = \underline{3} + 3 + 4 = 10$, $\theta_2' = 1 + 3 + 4 = 8$,

3) $(R_1, A_2), (R_2, A_1), (R_3, A_3)$: $\theta_3 = \underline{2} + 5 + 2 = 9$, $\theta_3' = 0 + 5 + 2 = 7$,

4) $(R_1, A_2), (R_2, A_3), (R_3, A_1)$: $\theta_4 = \underline{2} + 2 + 5 = 10$, $\theta_4' = 0 + 3 + 5 = 8$,

5) $(R_1, A_3), (R_2, A_1), (R_3, A_2)$: $\theta_5 = \underline{5} + 5 + 4 = 14$, $\theta_5' = 3 + 5 + 4 = 12$,

6) $(R_1, A_3), (R_2, A_2), (R_3, A_1)$: $\theta_6 = 5 + 5 + 5 = 15$, $\theta_6' = 3 + 5 + 5 = 13$.

În sumele neefectuate, ce reprezintă costurile totale ale cuplajelor, au fost subliniați, de fiecare dată, termenii ce scad cu cîte două unități, ei fiind extrași de pe prima linie a matricei C.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru aplicarea proprietății descrise mai sus, la o problemă de repartizare, operația de mai sus se aplică simultan la toate liniile, ca în tabelul II.3.6.

Tabelul II.3.6.

C:

3	2	5	−2
5	5	3	−3
5	4	2	−2

$\rightarrow C'$:

1	0	3
2	2	0
3	2	0

Desigur, cuplajele din matricea C' vor avea valorile totale cu $2 + 3 + 2 = 7$ unități mai mici decît cele corespunzătoare din matricea C. În plus, matricea C' are toate elementele nenegative, existînd pe fiecare linie cel puțin un zero.

Lema II.3.2. Dacă din toate elementele unei coloane a matricei C se scade același număr k, costurile totale corespunzătoare tuturor cuplajelor scad cu valoarea k.

Justificarea acestei leme este asemănătoare cu justificarea lemei II.3.1, ținîndu-se seama de faptul că valoarea totală a oricărui cuplaj este o sumă de termeni, dintre care unul și numai unul este un element c_{ij}, de pe coloana pe care se efectuează modificarea.

Exemplu. Efectuăm operația de scădere a minorantului fiecărei coloane, din toate elementele coloanei respective. Desigur, vom aplica această operație la matricea C', care are o serie de zerouri generate anterior. Se observă că minorantul primei coloane a matricei C' este egal cu unu, minoranții celorlalte coloane fiind egali cu zero. Deci, vom scădea cîte o unitate din toate elementele coloanei întîia, ceea ce duce la matricea C^* din tabelul II.3.7.

Tabelul II.3.7.

C':

1	0	3
2	2	0
3	2	0

$\rightarrow C^*$:

0	0	3
1	2	0
2	2	0

Toate cuplajele din matricea C^* vor avea valorile totale cu 8 unități mai mici decît cele corespunzătoare ale matricei inițiale C. În plus, ea are cel puțin cîte un zero pe fiecare linie și cîte un zero pe fiecare coloană.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema II.3.1. Dacă $x_{ij} = X_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, este soluția optimă a modelului M, atunci ea este și o soluție optimă a unui model dedus din M, prin înlocuirea funcției de eficiență cu:

$$(\min)\ z^* = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^* X_{ij},$$

unde $c_{ij}^* = c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, cu α_i și β_j constante arbitrare.

Teorema rezultă din cele două leme anterioare.

Exemplu. Aplicarea teoremei II.3.1 a fost făcută mai sus, prin construirea matricei C^*, din matricea C, folosind numerele:

$$\alpha_1 = 2; \qquad \alpha_2 = 3, \qquad \alpha_3 = 2,$$
$$\beta_1 = 1, \qquad \beta_2 = 0, \qquad \beta_3 = 0.$$

Pasul 2. Folosind ca matrice a costurilor pe C^*, cercetăm dacă putem găsi un cuplaj căruia să-i corespundă numai costuri nule: în cazul cînd un asemenea cuplaj există, el va avea o valoare totală nulă, deci va fi optim (atît pentru problema de repartizare cu matricea costurilor C^*, cît și pentru cea cu matricea costurilor C). În scopul cercetării existenței unui astfel de cuplaj, se efectuează operații de încadrare și tăiere a zerourilor matricei C^*, după cum urmează:

— se încadrează un zero de pe linia sau coloana cu cele mai puține zerouri, tăindu-se apoi toate zerourile ce se află pe aceeași linie și pe aceeași coloană cu zeroul încadrat;

— se repetă această operație asupra zerourilor rămase neîncadrate sau netăiate, pînă cînd nu mai există astfel de zerouri.

Dacă prin operațiile de mai sus, s-au putut încadra n zerouri, problema de repartizare este rezolvată, pozițiile acestor zerouri indicînd ce perechi de forma (R_i, A_j) formează un cuplaj optim (și pentru problema dată inițial).

Exemplu. Pe matricea C^*, obținută în exemplul precedent, efectuăm operațiile:

— încadrăm elementul $c_{11}^* = 0$, corespunzător poziției (R_1A_1), el fiind singurul zero de pe coloana întîia,

— tăiem zeroul de pe poziția (R_1A_2), el fiind pe aceeași linie cu cel încadrat,

— încadrăm zeroul de pe poziția (R_2A_3), el fiind singurul de pe linia a doua.

Scanned with OKEN Scanner

— tăiem zeroul de pe poziția (R_3A_3), el fiind pe aceeași coloană cu cel încadrat.

Se obține astfel matricea din tabelul II.3.8, în care nu s-a reușit decît încadrarea a două zerouri.

Tabelul II.3.8.

C^*:

$\boxed{0}$	0	3
1	2	$\boxed{0}$
2	2	0

Pasul 3. În cazul cînd, prin operația de încadrare a zerourilor, nu s-au putut încadra n zerouri, înseamnă că este posibil să mai micșorăm costurile totale ale cuplajelor, deplasînd unele zerouri din matricea C^*. Pentru aceasta, se folosește, mai întîi, următoarea operație de marcare a liniilor și coloanelor matricei C^*, în care s-au încadrat și tăiat, în prealabil, zerourile:

— se marchează toate liniile care nu conțin nici un zero încadrat,

— se marchează toate coloanele care au zero tăiat pe linii marcate,

— se marchează toate liniile care au zero încadrat pe coloane marcate,

— se repetă aceste operații cît este posibil.

Mulțimea liniilor nemarcate și coloanelor marcate poartă numele de *suport minimal* al matricei C^*, avînd următoarea proprietate; toate zerourile matricei se află pe aceste linii și coloane, numărul acestor linii și coloane (la un loc) fiind egal cu numărul de zerouri încadrate anterior (deci mai mic decît n și cel mai mic posibil).

Cu alte cuvinte, tăind liniile și coloanele ce formează suportul minimal al matricei, printre elementele rămase netăiate nu mai există nici un zero.

Exemplu. Fie matricea C*, folosită în exemplul precedent. Ea conține cîte un zero încadrat pe fiecare dintre primele două linii; singura linie ce nu conține zero încadrat este linia a treia, care se marchează cu o steluță în partea dreaptă a matricei. Urmărim apoi această linie a treia și observăm că ea conține un singur zero tăiat, în dreptul coloanei a treia: marcăm, deci, coloana treia cu o steluță sub matricea C*.

Scanned with OKEN Scanner

Conform acestei noi marcări, urmărim coloana a treia și observăm că ea conține un singur zero încadrat în dreptul liniei a doua: marcăm deci linia a doua. În continuare, urmărim linia a doua, nou marcată și observăm că ea nu mai conține nici un zero tăiat, ceea ce înseamnă că procesul de marcare s-a terminat. Se obține astfel suportul minimal al matricei C^* format din prima linie (cea nemarcată) și ultima coloană (cea marcată). După cum se vede, numărul de linii și coloane din acest suport este egal cu doi, egal și cu numărul de zerouri pe care am reușit să le încadrăm în pasul al doilea al algoritmului. Tăind linia întîi și coloana a treia, matricea C^* capătă forma din tabelul II.3.9, pe care s-a efectuat și marcarea.

Tabelul II.3.9.

[0]	0	3	
1	2	[0]	*
2	2	0	*
		*	

Observăm că în această matrice există trei feluri de elemente și anume:

— elementele rămase netăiate, care sînt $c^*_{22} = 1$, $c^*_{22} = 2$, $c^*_{31} = 2$, $c^*_{32} = 2$,

— un element tăiat de două ori (și cu linia și cu coloana), care este $c^*_{13} = 3$,

— elemente tăiate o singură dată (sau cu linia, sau cu coloana), care sînt $c^*_{11} = 0$, $c^*_{12} = 0$, $c^*_{23} = 0$, $c^*_{33} = 0$.

Pentru a face să apară unele zerouri noi în matricea c^*, vom scădea un număr θ (mereu același) din toate elementele liniilor ce nu fac parte din suportul minimal al matricei și vom aduna acest număr la toate elementele coloanelor ce aparțin suportului minimal (pentru a păstra eventualele zerouri ce se află și pe liniile și pe coloanele în cauză). Cititorul poate observa ușor, folosind exemplul de mai jos, că valoarea cea mai mare ce se poate da lui θ este egală cu cel mai mic element rămas netăiat în matricea C^*. În plus, efectuarea

Scanned with OKEN Scanner

operațiilor menționate revine la următoarea regulă mecanică, ce se poate aplica în mod direct:

— se alege elementul minim dintre cele rămase netăiate,
— se scade acest element din toate elementele netăiate,
— se adună același element la elementele dublu tăiate,
— se lasă neschimbate elementele tăiate o singură dată.

După efectuarea acestor operații se trece la o nouă încadrare și tăiere a zerourilor matricii obținute, adică se repetă pasul 2. Evident, dacă nici de această dată nu se reușește încadrarea a n zerouri, se modifică matricea folosită cu ajutorul pasului 3 ș.a.m.d., pînă cînd se găsește un cuplaj de n zerouri ale matricei.

Exemplu. În matricea obținută în tabelul II.39, elementul minim netăiat este egal cu unu. Efectuînd operațiile indicate în pasul 3 al algoritmului, se obține matricea din tabelul II.3.10.

Tabelul II.3.10

C^{**}:

0	$\underline{\boxed{0}}$	4
$\underline{\boxed{0}}$	1	0
1	1	$\underline{\boxed{0}}$

Repetăm pasul 2, pe această matrice, astfel:

— încadrăm elementul $c_{33}^{**} = 0$, el fiind singurul zero de pe linia a treia,

— tăiem elementul $c_{23}^{**} = 0$, el fiind pe aceeași coloană cu cel încadrat anterior,

— încadrăm elementul $c_{21}^{**} = 0$, el fiind singurul dintre zerourile rămase, pe linia a doua,

— tăiem elementul $c_{11}^{**} = 0$, el aflîndu-se pe aceeași coloană cu cel încadrat anterior,

— încadrăm elementul $c_{12}^{**} = 0$, singurul zero rămas.

Transformările descrise au fost efectuate pe tabelul din figura II.1.10. După cum se vede, s-au putut încadra trei zerouri și anume:

$$c_{12}^{**} = 0, \qquad c_{21}^{**} = 0, \qquad c_{33}^{**} = 0.$$

Corespunzător lor, putem preciza că cuplajul optim, atît în cazul matricei costurilor C^{**}, cît și în cazul matricelor anterioare, este următorul:

$$(R_1, A_2), \qquad (R_2, A_1) \qquad (R_3, A_3)$$

Scanned with OKEN Scanner

Cititorul este rugat să observe că s-a obținut același rezultat ca și prin metoda cercetării directe a tuturor cuplajelor posibile.

Observație. Există situații cînd, la operația de încadrare și tăiere a zerourilor, apar, la un moment dat, numai linii și coloane cu cel puțin două zerouri nefolosite. În acest caz, alegem una dintre posibilități, în mod arbitrar. Evident, dacă prin aceste operații sîntem conduși direct la o soluție optimă, realuarea operației cu încadrarea unui alt zero, de pe linia sau coloana corespunzătoare, poate conduce la altă soluție optimă.

Încheiem prezentarea metodei de determinare a repartizării optime, cu adaptarea ei la cazul cînd se cere un cuplaj cu costul total maxim. În acest caz, se transformă de la început problema de maxim în problema de minim, scăzînd toate elementele matricei C date, din cel mai mare dintre ele și aplicîndu-se apoi algoritmul ungar pe matricea obținută. Ilustrăm justificarea acestei transformări, pe exemplul folosit pe parcursul acestui paragraf. Cel mai mare element al matricei C este egal cu cinci. Scăzînd fiecare element al matricei C din cinci, se obține matricea din tabelul II.3.11.

Tabelul II.3.11

$\bar{C}$:

2	3	0
0	0	2
0	1	3

Să notăm cu $(c_{1p} + c_{1s} + c_{3t})$ costul total al unui cuplaj oarecare, într-o problemă de repartizare cu matricea costurilor C, cost ce aparține următoarei repartizări:

$$(R_1, A_p), (R_2, A_s), (R_3, A_t) \text{ cu } p \neq s, p \neq t, s \neq t.$$

Aceluiași cuplaj îi corespunde, pentru problema de repartizare cu matricea costurilor $\bar{C}$, următorul cost total:

$$\bar{c}_{1p} + \bar{c}_{2s} + \bar{c}_{3t} = (5 - c_{1p}) + (5 - c_{2s}) + (5 - c_{3t}) =$$

$$= 15 - (c_{1p} + c_{2s} + c_{3t}).$$

Scanned with OKEN Scanner

Din această egalitate rezultă că, dată $c_{1p} + c_{2s} + c_{3t} = \max$, vom avea și $\bar{c}_{1p} + \bar{c}_{2s} + \bar{c}_{3t} = \min$ și reciproc (scăzînd cît mai mult din valoarea constantă egală cu 15, vom avea o diferență cît mai mică). Cititorul poate generaliza acest raționament pentru cazul cînd există n resurse și n activități, caz în care în locul cantității constante 15, vom avea $k \cdot n$, k fiind cel mai mare element al matricei C.

În consecință, pentru a găsi cuplajul căruia îi corespunde un cost total maxim, într-o problemă de repartizare cu matricea costurilor C, vom aplica metoda descrisă pentru găsirea cuplajului cu cost total minim, într-o problemă de repartizare ajutătoare, a cărei matrice a costurilor este $\bar{C}$.

Revenind la exemplul cercetat, deoarece în matricea $\bar{C}$ există cel puțin cîte un zero pe fiecare linie și pe fiecare coloană, aplicăm direct pasul 2 al algoritmului, ceea ce conduce la încadrarea a trei zeroruri, ca în tabelul II.3.12.

Tabelul II.3.12

$\bar{C}$:

2	3	[0]
0	[0]	2
[0]	1	3

Cuplajul cu cost total minim, în cazul problemei ajutătoare, este dat, deci, de cele trei zerouri încadrate, ce corespund la perechile: (R_1, A_3), (R_2, A_2), (R_3, A_1). Această repartizare dă și soluția optimă a problemei de maxim, cu matricea costurilor C, caz în care valoarea cuplajului este: $c_{12} + c_{22} + c_{31} = 5 + 5 + 5 = 15$.

Probleme rezolvate

1. Pentru amplasarea unui număr de cinci obiective de importanță economică notate cu x_1, x_2, x_3, x_4 și x_5, există propunerea de folosire a cinci zone disponibile y_1, y_2, y_3, y_4 și y_5, urmînd a se plasa cîte un obiectiv în fiecare din aceste zone.

Condițiile principale fiind îndeplinite de toate cele cinci zone, alegerea urmează să se facă după criteriul îndeplinirii unui număr cît mai mare de condiții mai puțin importante,

Scanned with OKEN Scanner

ce fac parte dintr-un grup format din 20 astfel de condiții. În acest sens, amplasării obiectivului x_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, în zona y_j, $j = 1, 2, 3, 4, 5$, facem să-i corespundă un „cost" (penalizare) C_{ij}, egal cu numărul de condiții, dintre cele 20 luate în considerare, pe care această amplasare nu le îndeplinește. În tabelul III.3.13 sînt date costurile corespunzătoare amplasării fiecărui obiectiv x_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ în fiecare zonă y_j, $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

Tabelul II.3.13

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	4	6	5	4	3
x_2	7	8	9	1	6
x_3	7	7	8	2	7
x_4	8	10	10	4	10
x_5	6	9	7	1	5

Să se arate cum trebuie făcută amplasarea tuturor celor cinci obiective, în cele cinci zone, astfel încît pe ansamblu să se obțină o penalizare cît mai mică (cu număr cumulat cît mai mic de condiții dintre cele 20, care să nu fie îndeplinite).

Rezolvare

Trebuie să determinăm un cuplaj resurse-activități cu cost total minim, în matricea dată în tabelul II.3.13. Pentru aceasta, aplicăm algoritmul descris în acest paragraf.

Pasul 1. Facem să apară cel puțin un element egal cu zero pe fiecare linie, aplicînd următoarele operații:

— scădem cîte trei unități, din toate elementele primei linii;

— scădem cîte o unitate din toate elementele liniei a doua;

— scădem cîte două unități, din toate elementele liniei a treia;

— scădem cîte patru unități din toate elementele liniei a patra;

— scădem cîte o unitate din toate elementele liniei a cincea.

După aplicarea tuturor acestor operații, se obține matricea din tabelul II.3.14. Deoarece în această matrice nu există

Scanned with OKEN Scanner

cel puțin cîte un element egal cu zero pe fiecare coloană îi aplicăm operații asemănătoare și pe coloane, adică:

Tabelul II.3.14

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	1	3	2	1	0
x_2	6	7	8	0	5
x_3	5	5	6	0	5
x_4	4	6	6	0	6
x_5	5	8	6	0	4

— din toate elementele primei coloane scădem cîte o unitate;

— din toate elementele celei de-a doua coloane, îi scădem cîte trei unități;

— din toate elementele celei de-a treia coloane scădem cîte două unități;

— ultimele cele două coloane le păstrăm neschimbate, fiecare avînd cel puțin cîte un zero.

După aplicarea acestor operații se obține matricea din tabelul II.3.15.

Tabelul II.3.15

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
x_1	[0]	0	0	1	0	
x_2	5	4	6	[0]	5	*
x_3	4	2	4	0	5	*
x_4	3	3	4	0	6	*
x_5	4	5	4	0	4	*
				*		

Pasul 2. În tabelul II.3.15 se procedează la încadrarea și tăierea zero-urilor, după cum urmează:

— încadrăm mai întîi zero-ul din căsuța (x_2, y_4), el fiind singurul zero de pe linia a doua;

— tăiem cele trei zero-uri de pe aceeași coloană cu cel încadrat mai sus;

Scanned with OKEN Scanner

— încadrăm zero-ul din căsuța (x_1, y_1), el fiind singurul zero de pe coloana întîi;

— tăiem cele trei zero-uri de pe aceeași linie cu el, adică de pe linia întîi.

Deoarece nu s-au putut încadra decît două zero-uri, trecem la pasul următor.

Pasul 3. Pentru determinarea suportului minimal, marcăm liniile și coloanele matricei din tabelul II.3.15, după cum urmează:

— marcăm mai întîi liniile x_3, x_4 și x_5, deoarece ele nu conțin nici un zero încadrat;

— marcăm coloana y_4, deoarece ea conține zero-uri tăiate, în dreptul liniilor marcate;

— marcăm linia x_2, deoarece ea conține un zero încadrat, în dreptul coloanei y_4, marcată anterior;

— pe linia x_2 nu mai există nici un zero tăiat, deci, procesul de marcare ia sfîrșit.

Suportul minimal al matricei din tabelul II.3.15 este format din liniile nemarcate și coloanele marcate, deci, din linia întîi și coloana a patra care sînt tăiate pe tabelul respectiv. Elementul minim netăiat este $\theta = 2$, cu acesta procedîndu-se astfel:

— îl scădem din toate elementele netăiate;

— îl adunăm la elementul din căsuța (x_1, y_4) care este tăiat de două ori;

— celelalte elemente rămîn neschimbate.

Ca urmare, s-a obținut matricea din tabelul II.3.16, pe care se procedează la aplicarea pasului 2.

Pasul 2. Eefctuăm o nouă încadrare și tăiere a zero-urilor, după cum urmează:

Tabelul II.3.16

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
x_1	[0]	0	0	2	0	
x_2	3	2	4	[0]	3	*
x_3	2	[0]	2	0	3	
x_4	1	1	2	0	4	*
x_5	2	3	2	0	2	*

Scanned with OKEN Scanner

— încadrăm zero-ul din căsuța (x_2, y_4), el fiind singurul zero de pe linia a doua;

— tăiem cele trei zero-uri de pe coloana celui încadrat;

— încadrăm zero-ul din căsuța (x_3, y_2), el fiind singurul zero rămas neîncadrat sau netăiat de pe linia a treia;

— tăiem zero-ul din căsuța (x_1, y_2), el fiind pe aceeași coloană cu cel încadrat anterior;

— încadrăm zero-ul din căsuța (x_1, y_1), el fiind singurul zero de pe coloana întîi;

— tăiem zero-urile din căsuțele (x_1, y_3) și (x_1, y_5), de pe aceeași linie cu cel încadrat.

Aplicînd operațiile de mai sus, am reușit să încadrăm numai trei zero-uri, fapt pentru care trecem la pasul 3.

Pasul 3. Pe tabelul II.3.16 este realizată o marcare a liniilor și coloanelor, care arată că suportul minimal al matricei respective este format din liniile întîia și a treia și din coloana a patra; acestea sînt tăiate din tabel. Elementul minim rămas netăiat este $\theta = 1$, cu care se procedează ca și în pasul 3, anterior. Se obține tabelul II.1.17, asupra căruia se aplică din nou pasul 2.

Pasul 2. Încadrăm succesiv zero-urile din căsuțele (x_2, y_4), (x_3, y_2), (x_4, y_1), (x_1, y_3), tăind de fiecare dată zero-urile de pe aceeași linie și de pe aceeași coloană cu cel încadrat. Deoarece s-a reușit încadrarea a numai patru zero-uri, se trece la pasul 3.

Tabelul II.3.17

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
x_1	~~0~~	~~0~~	[0]	~~3~~	~~0~~	
x_2	2	1	3	[0]	2	*
x_3	~~2~~	[0]	~~2~~	~~1~~	~~3~~	
x_4	[0]	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~3~~	
x_5	1	2	1	~~0~~	1	*

Pasul 3. Procesul de marcare a liniilor și coloanelor, aplicat pe tabelul II.3.17, conduce la tăierea liniilor întîia, a treia

Scanned with OKEN Scanner

și a patra și a coloanei a patra. Elementul minim rămas netăiat este $\theta = 1$, folosirea lui conducînd la matricea din tabelul II.3.18.

Pe această matrice se reia pasul 2.

Tabelul II.3.18

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	θ	θ	$\underline{\boxed{0}}$	4	θ
x_2	1	θ	2	$\underline{\boxed{0}}$	1
x_3	2	$\underline{\boxed{0}}$	2	2	3
x_4	$\underline{\boxed{0}}$	θ	1	1	3
x_5	θ	1	θ	θ	$\boxed{0}$

Pasul 2. Încadrăm și tăiem zero-urile matricei din tabelul II.1.18 după cum urmează:

— încadrăm zero-ul din căsuța (x_3, y_2) de pe linia a treia și tăiem cele trei zero-uri de pe coloana a doua;

— încadrăm zero-ul din căsuța (x_2, y_4) și tăiem pe cel din căsuța (x_5, y_4);

— încadrăm zero-ul din căsuța (x_4, y_1) și tăiem pe cele din căsuțele (x_1, y_1) și (x_5, y_1);

— deoarece zerourile rămase neîncadrate și netăiate se găsesc cîte două pe fiecare linie și pe fiecare coloană, încadrăm unul din ele, de exemplu, pe cel din căsuța (x_1, y_3);

— tăiem zero-urile din căsuțele (x_1, y_5) și (x_5, y_3);

— încadrăm zero-ul din căsuța (x_5, y_5).

Deoarece s-a reușit încadrarea a cinci zero-uri, algoritmul a luat sfîrșit, cuplajul optim fiind format din perechile ce corespund la aceste zero-uri încadrate: (x_1, y_3), (x_2, y_4), (x_3, y_2), (x_4, y_1), (x_5, y_5). Aceasta înseamnă că amplasarea celor cinci obiective trebuie să se efectueze în modul următor:

— obiectivul x_1 în zona y_3
— obiectivul x_2 în zona y_4
— obiectivul x_3 în zona y_2
— obiectivul x_4 în zona y_1
— obiectivul x_5 în zona y_5

În acest fel se realizează o penalizare totală minimă, egală cu: $5 + 1 + 7 + 8 + 5 = 26$ unități.

Scanned with OKEN Scanner

Să observăm că la ultima aplicare a pasului 2, în cadrul operației de încadrare a zero-urilor, am avut de ales, la un moment dat, între cele două zero-uri de pe linia întîi. Astfel, după încadrarea zero-urilor din căsuțele (x_3, y_2), (x_2, y_4), (x_4, y_1), (x_4, y_1), dacă alegem să încadrăm zero-ul din căsuța (x_1, y_4), obținem o a doua soluție optimă, reprezentată în tabelul II.3.19. Această soluție conduce, de asemenea, la o penalizare totală de 26 unități, recomandînd următoarea amplasare a celor cinci obiective:

Tabelul II.3.19

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
y_1	0	0	0	4	[0]
x_2	1	0	2	[0]	1
x_3	2	[0]	2	2	3
x_4	[0]	0	1	1	3
x_5	0	1	[0]	0	0

— obiectivul x_1 în zona y_5
— obiectivul x_2 în zona y_4
— obiectivul x_3 în zona y_2
— obiectivul x_4 în zona y_1
— obiectivul x_5 în zona y_3

Alegerea, pentru aplicare, a uneia dintre cele două soluții optime găsite mai sus se poate face în mod arbitrar, sau folosind alte criterii, de importanță minoră.

2. Cele șase camioane ale unei întreprinderi, notate cu x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 și x_6, trebuie planificate în dimineața unei zile, pentru realizarea aprovizionării întreprinderii cu șase tipuri de materiale: y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 și y_6. Repartizarea unui camion x_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, pentru aprovizionarea cu tipul de materiale y_j, $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, conduce la un „cost" C_{ij}, pentru care se ține seama, de exemplu, de costul benzinei, retribuția șoferului, uzura camionului, lipsa de încărcare maximă a camionului, precum și de alte cheltuieli și pierderi legate de transportul respectiv. În tabelul II.3.20 sînt date costurile C_{ij}, $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, un cost infinit reprezentînd situația cînd camionul în cauză nu poate fi repartizat pentru aprovizionarea cu materialele respective, avînd o capacitate insuficientă.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul II.3.20

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	7	8	∞	∞	2	8
x_2	6	4	3	2	8	4
x_3	8	10	10	9	4	9
x_4	6	8	5	∞	2	8
x_5	3	8	∞	∞	8	9
x_6	8	8	8	8	3	10

În condițiile specificate, se cere o astfel de repartizare a camioanelor pe cele șase tipuri de materiale, astfel încît fiecare camion să efectueze aprovizionarea cu un singur tip de materiale, iar costul total, atașat acestei repartizări, să fie minim.

Rezolvare

Generăm mai întîi zero-uri pe liniile matricei date, scăzînd respectiv cîte două unități din toate elementele liniilor întîia, a doua și a patra, cîte trei unități din toate elementele liniilor a cincea și a șasea și cîte patru unități din toate elementele liniei a treia; se obține astfel matricea din tabelul II.3.21, pe care procedăm în mod asemănător pe coloane:

Tabelul II.3.21

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	5	6	∞	∞	0	6
x_2	4	2	1	0	6	2
x_3	4	6	6	5	0	5
x_4	4	6	3	∞	0	6
x_5	0	5	∞	∞	5	6
x_6	5	5	5	5	0	7

Scădem cîte două unități din toate elementele coloanelor a doua și a șasea, precum și cîte o unitate din toate elementele coloanei a treia.

Va trebui deci să aplicăm pasul doi al algoritmului pe matricea din tabelul II.3.22, obținută în urma aplicării operațiilor menționate mai sus.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul II.3.22

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
x_1	5	4	∞	∞	[0]	4	*
x_2	4	[0]	0	0	6	0	*
x_3	4	4	5	5	0	3	*
x_4	4	4	2	∞	0	4	*
x_5	0	3	∞	∞	5	4	
x_6	5	3	4	5	0	5	*

În tabelul II.3.22 este realizată o încadrare și tăiere a zero-urilor, precum și o marcare ulterioară a liniilor și coloanelor matricei.

Prin tăierea liniilor a doua și a cincea, împreună cu coloana a cincea, găsim că $\theta = 2$. Făcînd operațiile necesare, se ajunge la matricea din tabelul II.3.23, în care sînt efectuate operații asemănătoare. În această matrice s-au putut încadra patru zero-uri, suportul minimal fiind format din trei linii și o coloană. Folosind elementul minim rămas netăiat $\theta = 1$, se ajunge la matricea din tabelul II.3.24, în care s-a reușit încadrarea a șase zero-uri.

Tabelul II.3.23

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
x_1	3	2	∞	∞	[0]	2	*
x_2	4	[0]	0	0	7	0	
x_3	2	2	3	3	0	1	*
x_4	2	2	[0]	∞	0	2	
x_5	[0]	3	∞	∞	6	4	
x_6	3	1	2	3	0	3	*
					*		

Tabelul II.3.24

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	2	1	∞	∞	[0]	1
x_2	4	0	0	[0]	8	0
x_3	1	1	2	2	0	[0]
x_4	2	2	[0]	∞	1	2
x_5	[0]	3	8	∞	7	4
x_6	2	[0]	1	2	0	2

Scanned with OKEN Scanner

Aceasta este și soluția optimă formată din următoarele perechi:

$$(x_1, y_5), (x_2, y_4), (x_3, y_6), (x_4, y_3), (x_5, y_1), (x_6, y_2).$$

Se va lua deci următoarea decizie:

— camionul x_1 va pleca pentru aprovizionarea cu tipul de material y_5;

— camionul x_2 va fi repartizat materialelor de tipul y_4;

— camionul x_3 va fi repartizat materialelor de tipul y_6;

— camionul x_4 va fi repartizat materialelor de tipul y_3;

— camionul x_5 va fi repartizat materialelor de tipul y_1;

— camionul x_6 va fi repartizat materialelor de tipul y_2.

Această repartizare optimă este unică și conduce la un cost total egal cu: $2 + 2 + 9 + 5 + 3 + 8 = 29$ unități.

3. Cinci secții ale unei întreprinderi, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, pot fabrica aceleași cinci tipuri de produse: p_1, p_2, p_3, p_4 și p_5. Se hotărăște ca fiecare dintre aceste secții să se specializeze în fabricarea unui singur produs, dintre cele menționate.

Eficiența realizării de către secția s_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, a produsului p_j, $j = 1, 2, 3, 4, 5$, se estimează cu ajutorul condițiilor existente inițial în fiecare secție, putîndu-se reprezenta convențional printr-un indicator numeric C_{ij}. Tabelul II.3.25 conține toți acești indicatori, corespunzători fabricării oricărui produs, de către fiecare secție. În acest tabel simbolul $-\infty$ reprezintă imposibilitatea unei secții de a fabrica produsul respectiv. Să se determine o repartizare a secțiilor întreprinderii pentru fabricarea celor cinci tipuri de produse, astfel încît să se obțină o eficiență maximă, pe întreaga întreprindere.

Tabelul II.3.25

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
S_1	1,3	1,1	1,1	1	1,8
s_2	1,5	1,3	1,2	1,1	1.8
s_3	1,1	0,9	1	$-\infty$	1,7
s_4	1,3	1,3	$-\infty$	$-\infty$	1,8
s_5	1,5	1,4	1,4	1,3	1,2

Rezolvare

Trebuie determinat un cuplaj resurse-activități, căruia să îi corespundă un cost total maxim, considerînd indicatorii din tabelul II.3.25, ca pe niște „costuri".

Scanned with OKEN Scanner

Vom transforma problema de maxim într-una de minim, scăzînd toate elementele matricei date, din cel mai mare dintre ele, adică din 1,8. Cu alte cuvinte, vom determina cuplajul cu cost total minim, în matricea ce se găsește în tabelul II.3.26.

Pentru efectuarea mai ușoară a calculelor, vom înlocui tabelul II.3.26 cu tabelul II.3.27, ale cărui elemente sînt de zece ori mai mari (deci numere întregi).

Tabelul II.3.26

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
s_1	0,5	0,7	0,7	0,8	0
s_2	0,3	0,5	0,6	0,7	0
s^3	0,7	0,9	0,8	∞	0,1
s_4	0,5	0,5	∞	∞	0
s_5	0,3	0,4	0,4	0,5	0,6

Evident că această înlocuire nu va afecta pozițiile ce formează cuplajul optim, deoarece prin această înmulțire valorile tuturor cuplajelor posibile cresc de zece ori și deci cel mai bun rămîne tot cel mai bun.

Tabelul II.3.27

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
s_1	5	7	7	8	0
s_2	3	5	6	7	0
s_3	7	9	8	∞	1
s_4	5	5	∞	∞	0
s_5	3	4	4	5	6

Scăzînd cîte o unitate din toate elementele de pe linia a treia a tabelului II.3.27, apoi cîte trei unități din toate elementele liniei a cincea, se obține matricea din tabelul II.3.28, în care există cel puțin un zero pe fiecare linie.

În tabelul intermediar II.3.28, scădem cîte o unitate din toate elementele coloanelor a doua și a treia, precum și cîte două unități din toate elementele coloanei a patra, ceea ce conduce la tabelul II.1.29, în care există cel puțin un zero pe fiecare linie și pe fiecare coloană.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul II.3.28

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
s_1	5	7	7	8	0
s_2	3	5	6	7	0
s_3	6	8	7	∞	0
s_4	5	5	∞	∞	0
s_5	0	1	1	2	3

În tabelul II.3.29 este realizată și prima încadrare a zero-urilor, precum și determinarea raportului minimal corespunzător. Transformările impuse de algoritm conduc la matricea din tabelul II.3.30, pe care este realizată a doua încadrare

Tabelul II.3.29

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	
s_1	5	6	6	6	$\boxed{0}$	*
s_2	3	4	5	5	0	*
s_3	6	7	6	∞	0	*
s_4	5	4	∞	∞	0	*
s_5	$\boxed{0}$	0	0	0	3	
					*	

Tabelul II.3.30

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	
s_1	2	3	3	3	$\boxed{0}$	*
s_2	$\boxed{0}$	1	2	2	0	
s_3	3	4	3	∞	0	*
s_4	2	1	∞	∞	0	*
s_5	0	$\boxed{0}$	0	0	4	
					*	

Scanned with OKEN Scanner

a zero-urilor, împreună cu suportul minimal corespunzător. Sîntem conduși la tabelul II.3.31, în care s-au putut încadra patru zero-uri.

Tabelul II.3.31.

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	
s_1	1	2	2	2	0	*
s_2	$\underline{\boxed{0}}$	1	2	2	1	
s_3	2	3	2	∞	0	*
s_4	1	$\underline{\boxed{0}}$	∞	∞	0	
s_5	0	0	$\underline{\boxed{0}}$	0	5	

Folosirea suportului minimal, calculat pe același tabel, duce la matricea din tabelul II.3.32, în care s-au putut încadra tot patru zero-uri. Prezentăm desfășurat determinarea suportului minimal, la această etapă de rezolvare, pe tabelul II.3.32.

Tabelul II.3.32

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	
s_1	0	1	1	1	$\underline{\boxed{0}}$	*
s_2	$\underline{\boxed{0}}$	1	2	2	2	*
s_3	1	2	1	∞	0	*
s_4	1	$\underline{\boxed{0}}$	∞	∞	1	
s_5	0	0	$\underline{\boxed{0}}$	0	6	

— marcăm linia s_3, singura care nu conține zero încadrat;

— marcăm coloana p_5, ce are un zero tăiat în dreptul liniei s_3, marcate anterior;

— marcăm linia s_1, ce are un zero încadrat în dreptul coloanei p_5, marcată anterior;

Scanned with OKEN Scanner

— marcăm coloana p_1, ce are un zero tăiat în dreptul liniei s_1, marcate anterior;

— marcăm linia s_2, ce are un zero încadrat în dreptul coloanei p_1, marcate anterior;

— procesul de marcare se oprește, deoarece pe linia s_2 nu mai există zero tăiat.

Folosirea suportului minimal, aflat prin marcarea descrisă mai sus, conduce la matricea din tabelul II.3.33. În acest tabel este făcut numai un început de încadrare a zero-urilor, fiind încadrate numai zero-urile din pozițiile (s_4, p_2) și (s_2, p_1), impuse de algoritm. Observăm că încadrarea zero-urilor poate continua în mai multe feluri, existînd cel puțin două zero-uri pe fiecare linie și pe fiecare coloană, dintre cele rămase în discuție.

Tabelu II.3.33

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
s_1	θ	θ	0	0	0
s_2	$\underline{\boxed{0}}$	θ	1	1	2
s_3	1	1	0	∞	0
s_4	2	$\underline{\boxed{0}}$	∞	∞	2
s_5	1	θ	0	0	7

Fixîndu-ne atenția asupra celor două zero-uri de pe linia a cincea, să încadrăm, de pildă, pe cel din poziția (s_5, p_3), ceea ce conduce la soluția optimă din tabelul II.3.34. Această primă soluție optimă conține deci următoarele perechi.

$$(s_1, p_4), (s_2, p_1), (s_3, p_5), (s_4, p_2), (s_5, p_3)$$

Alegînd în tabelul II.3.33 cealaltă alternativă de încadrare a unui zero de pe linia s_5, se ajunge la situația din tabelul II.3.35, în care există, de asemenea două posibilități de continuare.

Folosindu-le, se obțin încă două soluții optime. Cea de-a doua soluție optimă a problemei va fi dată de perechile:

$$(s_1, p_3), (s_2, p_1), (s_3, p_5), (s_4, p_2), (s_5, p_4),$$

iar cea de-a treia soluție optimă este:

$$(s_1, p_5), (s_2, p_1), (s_3, p_3), (s_4, p_2), (s_5, p_4).$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul II.3.34

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
s_1	0	0	0	[0]	0
s_2	[0]	0	1	1	2
s_3	1	1	0	∞	[0]
s_4	2	[0]	∞	∞	2
s_5	1	0	[0]	0	7

Tabelul II.3.35

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
s_1	0	0	0	0	0
s_2	[0]	0	1	1	2
s_3	1	1	0	∞	0
s_4	2	[0]	∞	∞	2
s_5	1	0	0	[0]	7

Toate cele trei soluții optime, găsite mai sus, corespund la sume egale ale indicatorilor de eficiență, sume de 6,9 unități. Aceste soluții realizează deci un indicator mediu de eficiență pe întreaga întreprindere, de 6,9 : 5 = 1,38 unități.

Dăm, ca exemplu, decizia ce urmează să se ia, conform primei soluții optime, dintre cele aflate mai sus:

— secția s_1 va fabrica produse de tipul p_4;
— secția s_2 va fabrica produse de tipul p_1;
— secția s_3 va fabrica produse de tipul p_5;
— secția s_4 va fabrica produse de tipul p_2;
— secția s_5 va fabrica produse de tipul p_3.

Probleme date spre rezolvare

4. Pentru efectuarea a șase lucrări diferite, notate cu y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, sînt disponibili șase muncitori, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6.

Tabelul II.3.36 conține timpul necesar fiecărui muncitor x_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, pentru executarea fiecărei lucrări y_j, $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Să se determine o repartizare a muncitorilor pe lucrări, astfel încît suma timpilor de executare să fie minimă.

Tabelul II.3.36

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	8	9	8	8	1	8
x_2	10	7	6	8	1	7
x_3	11	10	9	7	4	10
x_4	10	10	9	7	3	10
x_5	5	5	5	6	4	4
x_6	8	7	9	10	1	8

Scanned with OKEN Scanner

Răspuns. Repartizarea optimă este dată de următoarele șase perechi: (x_1, y_1), (x_2, y_3), (x_3, y_4), (x_4, y_5), (x_5, y_6), (x_6, y_2).

Suma minimă a timpilor de executare este egală cu 35 unități de timp.

5. Cinci tipuri de produse: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 pot fi fabricate de cinci mașini: y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, dar folosind timpuri unitare de fabricare diferite, date în tabelul II.3.37.

Tabelul II.3.37

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	5	5	3	5	7
x_2	3	1	∞	1	4
x_3	∞	7	2	6	8
x_4	6	∞	4	7	8
x_5	3	∞	1	3	∞

În acest tabel un cost egal cu infinit reprezintă faptul că piesa respectivă nu se poate lucra pe mașina în cauză. Urmărindu-se ca fiecare tip de produs să fie fabricat de o singură mașină, să se găsească repartizarea produselor pe mașini, astfel încît să se facă cea mai mare economie de timp.

Răspuns. Există patru reprezentări optime și anume:

a) (x_1, y_4), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_5), (x_5, y_1)
b) (x_1, y_2), (x_2, y_4), (x_3, y_3), (x_4, y_5), (x_5, y_1)
c) (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_5), (x_5, y_4)
d) (x_1, y_5), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_1), (x_5, y_4)

Costul fiecărui cuplaj optim este 19.

6. Aprovizionarea cu un anumit produs a cinci magazine, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, se poate face de la cinci depozite, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, costurile de transport fiind cele din tabelul II.3.38.

Se convine ca aprovizionarea fiecărui magazin să se facă de la un singur depozit. Să se precizeze cum trebuie să se repartizeze depozitele pentru aprovizionarea celor cinci magazine, astfel încît costul total de transport să fie minim.

Tabelul II.3.38

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	3	3	6	6	5
x_2	2	4	6	6	9
x_3	1	4	7	5	4
x_4	3	5	8	8	6
x_5	7	8	6	5	7

Scanned with OKEN Scanner

Răspuns. Există două repartizări optime și anume:
a) (x_1, y_2), (x_2, y_3), (x_3, y_1), (x_4, y_5), (x_5, y_4),
b) (x_1, y_2), (x_2, y_3), (x_3, y_5), (x_4, y_1), (x_5, y_4).
Ambele cuplaje optime au valoarea 21.

B. Probleme de distribuire

Problema practică tipică, a cărui model coincide cu modelul alocării de tip distribuire, este așa-numita *problemă a transporturilor*, care constă în următoarele:

— în m *„centre producatoare"*, $A_1, A_2, \ldots, A_m$, se află un anumit produs, în cantități respectiv egale cu $a_1, a_2, \ldots a_m$,

— produsul în cauză este cerut de n *„centre consumatoare"*, $B_1, B_2, \ldots, B_n$, care au nevoie de cantități respectiv egale cu $b_1, b_2, \ldots, b_n$,

— se cunosc *costurile unitare de transport*, de la fiecare centru producător la fiecare centru consumator,

— costul transportului între două centre este proporțional cu cantitatea transportată, iar liniile ce leagă centrele producătoare cu cele consumatoare au posibilitatea să asigure transportul oricăror cantități (în limitele problemei date),

— se cere să se determine un asemenea plan de transport, care să asigure în cea mai mare măsură cantitățile necesare în centrele consumatoare, dar la un cost total, al întregului transport, minim.

În cele ce urmează, adoptăm, în general, pentru o problemă de alocare de tip distribuire, limbajul legat de problema transporturilor, descrisă mai sus. În acest fel, datele unei probleme de distribuire se pot așeza într-un tabel de forma celui din tabelul II.3.39.

Tabelul II.3.39

A_i \ B_j	B_1 B_2, ..., B_n	a_i
A_1	c_{11} c_{12}, ..., c_{1n}	a_1
A_2	c_{21} c_{22}, ..., c_{2n}	a_2
.	. . ... .	.
.	. . ... .	.
.	. . ... .	.
A_m	c_{m1} c_{m2}, ..., c_{mn}	a_m
b_j	b_1 b_2, ..., b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i$ $\sum_{i=1}^{n} b_j$

Scanned with OKEN Scanner

După cum se vede, s-a notat cu c_{ij} costul unitar de transport de la centrul de producție A_i, la centrul de consum B_j. În colțul din dreapta jos al tabelului, s-au efectuat următoarele două sume:

$\sum_{i=1}^{m} a_i$, numită *total disponibil*,

$\sum_{j=1}^{n} b_j$, numită *total necesar*.

Dacă în problemă avem îndeplinită condiția:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad \text{(II.3.1)}$$

se zice că problema este *echilibrată*.

Vom arăta, în continuare, că orice problemă de transport poate fi redusă cu ușurință la o problemă echilibrată, ceea ce înseamnă că pentru rezolvare ne vom ocupa numai de astfel de probleme.

1. Dacă avem:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

(total disponibil mai mare decît total necesar), înseamnă că în centrele producătoare rămîn anumite cantități netransportate (pot exista și centre producătoare din care să plece integral cantitățile, dar există, cu siguranță, cel puțin unul, în care rămîne produs netransportat). Vom zice că acele cantități, ce urmează să rămînă netransportate, „pleacă" spre un *centru fictiv de consum*, notat cu B_{n+1}, al cărui necesar este egal cu diferența celor două sume de mai sus:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Deoarece cantitățile ce urmează a se „transporta" la centrul fictiv B_{n+1} sînt, în realitate, cantități ce rămîn în centrele producătoare, costurile unitare de transport respectiv se iau egale cu zero. În acest fel, problema devine echilibrată, urmînd ca după rezolvare să interpetăm corect „transporturile" spre centrul fictiv B_{n+1}.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu. Fie problema de transport, cu datele din tabelul II.3.50.

Tabelul II.3.40

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	5	4	3	300
A_2	1	3	2	300
b_j	100	250	150	600 500

Deoarece totalul disponibil (600) depășește totalul necesar (500), introducem centrul fictiv de consum B_4, care are nevoie exact de o cantitate egală cu diferența celor două totaluri, adică de 100 unități. Costurile de transport de la A_1 și A_2, spre centrul fictiv B_4 fiind nule, problema dată capătă forma echilibrată, din tabelul II.3.41.

Tabelul II.3.41

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	4	3	0	300
A_2	1	3	2	0	300
b_j	100	250	150	100	600

2. Dacă avem:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

(total disponibil mai mic decî total necesar), înseamnă că unele centre consumatoare nu vor primi cantități necesare în întregime, rămînînd nesatisfăcute (pot exista și centre consumatoare ce vor fi satisfăcute complet, dar există, cu siguranță cel puțin unul, ce nu va primi întreaga cantitate cerută). Vom zice că acele cantități, cu care nu se satisfac cererile, „sosesc" de la un *centru fictiv de producție*, notat A_{m+1}, care are un disponibil egal cu diferența pozitivă a celor două sume de mai sus:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece cantitățile ce urmează a „sosi" de la centrul fictiv de producție A_{m+1} sînt, în realitate, cantități ce nu există (cu aceste cantități rămînînd nesatisfăcute centrele consumatoare), costurile unitare de transport respective se iau egale cu zero. În acest fel, problema devine echilibrată, urmînd ca în final, după rezolvarea ei, să interpretăm corect, conform celor de mai sus, „transporturile" de la centrul fictiv A_{m+1}.

Exemplu. Fie problema de transport, cu datele din tabelul II.3.42.

Tabelul II.3.42

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	3	4	2	200
A_2	2	5	6	300
b_j	150	250	230	500 630

Deoarece totalul disponibil (500) este mai mic decît totalul, necesar (630), introducem centrul fictiv de producție A_3 care are un disponibil egal cu 130 unități (diferența celor două totaluri). Costurile unitare de transport de la acest centru fictiv la B_1, B_2 și B_3 fiind nule, problema dată capătă forma echilibrată din tabelul II.3.43.

Tabelul II.3.43

A_i \ B_i	B_1	B_2	B_3	a_j
A_1	3	4	2	200
A_2	2	5	6	300
A_3	0	0	0	130
b_j	150	250	230	630

Conform celor prezentate mai sus, orice problemă neechilibrată de transport poate fi înlocuită cu alta, corespunzătoare ei, care este echilibrată. De aceea, în cele ce urmează vom presupune, de la început, că problema ce trebuie rezolvată este echilibrată. În acest caz, este clar că toate canti-

Scanned with OKEN Scanner

tățile disponibile din centrele de producție, vor pleca din aceste centre, asigurînd integral cantitățile necesare în centrele de consum.

Un plan de transport în cadrul problemei puse, trebuie să precizeze ce cantități pleacă de la fiecare centru producător la fiecare centru consumator. Un astfel de plan se poate pune deci, sub forma unei matrice, ca în tabelul II.3.44 unde cu x_{ij} s-a notat cantitatea de produs ce pleacă de la centrul producător A_i la centrul consumator B_j. Convenim, în plus, ca valorile x_{ij} egale cu zero să nu se mai scrie, căsuțele corespunzătoare rămînînd libere. Astfel, oricărei componente diferite de zero îi va corespunde o căsuță ocupată a tabelei, iar unei componente nule, o căsuță liberă.

Tabelul II.3.44

X :

A_i \ B_j	B_1	B_2,	...,	B_n
A_1	x_{11}	x_{12},	...,	x_{1n}
A_2	x_{21}	x_{22},	...,	x_{2n}
.	.	.	...	.
.	.	.	...	.
.	.	.	...	.
A_m	x_{m1}	x_{m2},	...,	x_{mn}

De multe ori nu vom mai scrie nici simbolurile ce reprezintă centrele producătoare și centrele consumatoare, acestea fiind subînțelese.

În continuare, vom scrie modelul matematic al problemei, considerînd valorile x_{ij} ca pe niște variabile de decizie. Deoarece problema este presupusă echilibrată, suma cantităților ce pleacă din centrul producător A_1, spre centrele consumatoare, tebuie să epuizeze cantitatea disponibilă în centrul A_1, adică:

$$x_{11} + x_{12} \ldots + x_{1n} = a_1,$$

sau, pe scurt:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1j} = a_1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Analog, putem scrie egalități de acest fel și pentru celelalte linii ale matricei X. Se obține de aici *primul grup de restricții* ale modelului matematic, care se poate scrie concentrat sub forma:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \text{ pentru } i = 1, 2, \ldots, m. \qquad \text{(II 3.2)}$$

Vom spune că acest grup de restricții impune *echilibrul pe linii*, fiecare dintre egalitățile acestui grup arătînd că suma tuturor valorilor variabilelor de pe o linie este egală cu cantitatea disponibilă în centrul producător corespunzător liniei. Pe de altă parte, valorile variabilelor trebuie să verifice un al doilea grup de restricții, de *echilibru pe coloane*, suma valorilor de pe fiecare coloană trebuind să fie egală cu cantitatea necesară în centrul consumator corespunzător. Acest al doilea grup de restricții se scrie astfel:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \text{ pentru } j = 1, 2, \ldots, n. \qquad \text{(II.3.3)}$$

Variabilele x_{ij} pot lua deci valori reale, ce verifică restricțiile (II.3.1) — (II.3.2), însă, evident, numai pozitive sau nule (conform sensului economic). Scriem aceasta sub forma așa-ziselor *condiții de nenegativitate*, astfel:

$$x_{ij} \geqslant 0, \text{ pentru } i = 1, 2, \ldots, m \text{ și } j = 1, 2, \ldots, n \qquad \text{(II.3.4)}$$

În sfîrșit, planului de transport X îi corespunde un cost total al transportului, care se calculează cu formula:

$$\begin{aligned} f(X) = {} & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{21} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + \\ & + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn}. \end{aligned} \qquad \text{(II.3.5)}$$

Aceasta reprezintă *funcția de eficiență* sau *funcția obiectiv* a modelului, alegerea unui anumit plan de transport (decizia) trebuind să se facă astfel încît valoarea funcției să fie cît mai mică. Condensat, funcția de eficiență se scrie astfel:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}. \qquad \text{(II.3.5')}$$

Scanned with OKEN Scanner

Strîngînd la un loc rezultatele de mai sus, putem scrie modelul matematic al unei probleme de transport sub forma următoare:

$$(M)\left|\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1, 2, \ldots, m,\\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j,\ j = 1, 2, \ldots, n,\end{array}\right.\\ x_{ij} \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, m \text{ și } j = 1, 2, \ldots, n,\\ [\min] f(X) = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}.\end{array}\right.$$

Se arată că datorită condițiilor de echilibru (II.3.1), una dintre restricțiile modelului este o consecință a tuturor celorlalte, deci poate fi eliminată din sistemul (II.3.2) — (II.3.3). Ilustrăm această proprietate pe baza unui model particular, M', în care apar două centre producătoare și trei centre consumatoare, cititorul putînd apoi generaliza cu ușurință. Sistemul de restricții corespunzător modelului menționat are forma:

$$\left\{\begin{array}{l}x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2\end{array}\right\} \text{(i)}$$

$$\left\{\begin{array}{l}x_{11} + x_{21} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} = b_2 \\ x_{13} + x_{23} = b_3\end{array}\right\} \text{(ii)}$$

Deoarece $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + b_3$, prima restricție poate fi obținută din toate celelalte, prin următoarele operații:

— se adună toate restricțiile din grupul (ii);

— se scade din egalitatea rezultată, restricția a doua.

Evident, putem să alegem inițial oricare dintre restricțiile sistemului, pentru a arăta că ea este o consecință a celorlalte.

Eliminînd, de pildă, prima restricție de mai sus, se obține un sistem cu numai patru restricții. Cititorul poate observa că rangul matricei acestui sistem rămas este egal cu patru, deci că toate ecuațiile lui sînt independente (principale).

Scanned with OKEN Scanner

Generalizînd cele de mai sus, putem preciza că modelul unei probleme de transport, cu m centre producătoare și n centre consumatoare, conține:

— un număr de mn variabile,

— un număr de $m + n$ restricții (m de echilibru pe linii și n de echilibru pe coloane), dintre care $(m + n - 1)$ independente.

Corelînd aceste rezultate cu cele prezentate în capitolul precedent, putem spune că:

— o soluție a sistemului de restricții (II.3.2)—(II.3.3), cu toare componentele nenegative (așa-numita *soluție realizabilă*) este soluție de bază dacă are cel mult $(m + n - 1)$ componente strict pozitive, aceste componente corespunzînd la vectori liniar independenți din matricea sistemului de restricții,

— mulțimea soluțiilor realizabile este o mulțime convexă (teorema II.2.2), vîrfurile ei fiind soluțiile realizabile de bază ale sistemului (teorema II.2.3),

— valoarea minimă a funcției de eficiență este atinsă cel puțin pentru o soluție realizabilă de bază (teorema II.2.5),

— mulțimea soluțiilor optime ale modelului M este convexă (teorema II.2.4).

Din cele de mai sus, rezultă o metodă de rezolvare a modelului M, care constă în următoarele:

(i) Determinăm o soluție realizabilă de bază (soluție inițială).

(ii) Cercetăm dacă se pot găsi soluții realizabile de bază mai bune (care dau funcției de eficiență valori mai mici): dacă nu, soluția este optimă, iar dacă da, se înlocuiește această soluție cu alta mai bună, repetîndu-se procedeul de cîte ori este posibil.

În cele ce urmează, vom prezenta, pe rînd, fiecare dintre cele două părți ale metodei (algoritmului).

(i) *Determinarea unei soluții realizabile de bază inițiale.* Există mai multe metode în acest sens, dintre care prezentăm în continuare numai două.

a) Prin *metoda colțului nord-vest*, se determină o soluție realizabilă de bază, fără să se țină seama de costurile unitare de transport, ci numai de cantitățile disponibile în centrele de producție și de cantitățile necesare în centrele de consum. Vom prezenta această metodă pe baza unui exemplu de problemă de transport, cu trei centre producătoare și patru

Scanned with OKEN Scanner

centre consumatoare, în care folosim numai datele din tabelul II.3.45, urmînd ca interiorul tabelului să fie completat cu valorile x_{ij}^0, ale soluției inițiale x_0.

Tabelul II.3.45

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1					20
A_2					30
A_3					50
b_j	15	37	23	25	100

Ne propunem să completăm întîi căsuța din stînga sus a tabelului, adică să folosim calea de transport de la A_1 la B_1: din Centrul A_1 am putea trimite 20 de unități, dar nu sînt necesare în B_1 decît 15 unități, astfel încît pe această cale de transport nu putem duce decît cel mult

$$x_{11} = \min\{a_1, b_1\} = \min\{20,15\} = 15 \text{ unități.}$$

Completăm căsuța corespunzătoare a tabelului cu această cantitate și modificăm cantitățile a_1 și b_1, scăzînd din ele cîte 15 unități. Observăm că, în acest fel, centrul B_1 a fost satisfăcut, deci el nu va mai intra în discuție la următorul pas. Se obține astfel situația din tabelul II.3.46, în care coloana lui B_1 a fost haşurată, pentru a sugera faptul că ea nu va mai fi considerată.

Tabelul II.3.46

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	~~15~~				~~20~~ 5
A_1					30
A_3					50
b_j	~~15~~	37	23	25	100

Colțul din stînga sus, al tabelului II.3.46, rămas nehașurat, este dat de căsuța (A_1, B_2), în care putem pune cel mult o cantitate egală cu:

$$x_{12} = \min\{a_1 - x_{11} \cdot b_2\} = \min\{5,37\} = 5.$$

Scanned with OKEN Scanner

Făcînd modificările corespunzătoare și renunțînd în tabel și la linia A_1, care a fost satisfăcută complet, obținem situația din tabelul II.3.47. În acest tabel, colțul din stînga-sus, ce trebuie luat în discuție, este dat de căsuța (A_2, B_2). În căsuță, punem o cantitate egală cu:

$$x_{22} = \min\{a_2,\ b_2 - x_{12}\} = \min\{30,\ 32\} = 30.$$

Tabelul II.3.47

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	15	5			~~20~~ 5
A_2					30
A_3					50
b_j	~~15~~	~~37~~ 32	23	25	100

Modificările efectuate după această înlocuire, conduc la situația din tabelul II.3.48, în care a rămas un singur centru producător cu o cantitate disponibilă de 50 unități.

Tabelul II.3.48

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	15	5			~~20~~ ~~5~~
A_2		30			~~30~~
A_3					50
b_j	~~15~~	~~37~~ ~~32~~ 2	23	25	100

Această cantitate nu poate fi repartizată decît într-un singur mod și anume: 2 unități în B_2, 23 unități în B_3 și 25 unități în B_4, adică:

$$x_{32} = 2, \quad x_{33} = 23, \quad x_{34} = 25.$$

Obținem astfel, soluția X_0 din tabelul II.3.49, care are exact $(m + n - 1) = 3 + 4 - 1 = 6$ componente strict pozitive, celelalte fiind egale cu zero.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul II.3.49

X_0:

15	5		
	30		
	2	23	25

Observație. Conform convenției făcute, componentele egale cu zero nu s-au mai scris, căsuțele corespunzătoare din tabel rămînînd libere. De asemenea, nu s-au mai scris centrele producătoare și consumatoare. Accentuăm în plus că haşurarea succesivă a tabelului nu trebuie efectuată, ci numai imaginată de cititor: haşurarea a fost făcută de noi numai pentru uşurarea înțelegerii.

Se arată că, în general, metoda descrisă conduce la o soluție realizailă de bază, numărul căsuțelor ocupate fiind cel mult egal cu $(m + n - 1)$.

b) *Metoda elementului minim al matricei.* În metoda precedentă, alegerea succesivă a căsuței din colțul de stînga-sus al tabelului rămas este convențională, putînd alege de fiecare dată o altă căsuță a acestui tabel. Astfel, de pildă, dacă de fiecare dată alegem spre completare o căsuță căreia îi corespunde unul dintre costurile unitare de transport cele mai mici, bineînțeles dintre căsuțele rămase în discuție, se spune că se obține o soluție inițială prin metoda elementului minim al matricei, de obicei mai bună decît cea obținută prin metoda colțului nord-vest.

Ilustrăm această metodă pe același exemplu ca mai sus, considerînd ca matrice a costurilor pe cea din tabelul II.3.50.

Tabelul II.3.50

C:

7	6	4	3
9	5	$2^{(1)}$	6
$4^{(3)}$	8	5	$3^{(2)}$

De această dată, vom alege spre completare, la început, căsuța (A_2, B_3), căreia îi corespunde cel mai mic cost unitar de transport (egal cu doi și marcat în tabel cu indicele (1), în partea de sus). În această căsuță, punem:

$$x_{23} = \min \{a_2, b_3\} = \min\{30, 23\} = 23.$$

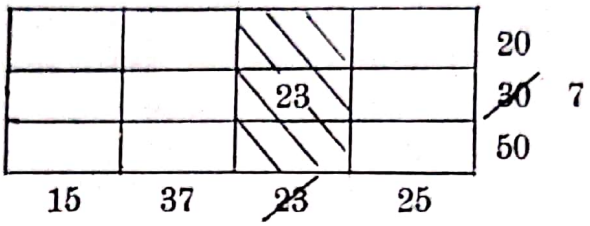
Scădem deci cîte 23 unități din a_2 și din b_3 și renunțăm la coloana a treia a tabelului, centrul B_3 fiind complet satisfăcut,

Scanned with OKEN Scanner

așa cum se arată în tabelul II.3.51. În acest tabel, alegem din nou un cost unitar de transport cît mai mic, în raport cu tabela rămasă, de exemplu $c_{34} = 3$, marcat în matricea C cu indicele (2) și punem:

$$x_{34} = \min\{a_3, b_4\} = \min\{50, 25\} = 25.$$

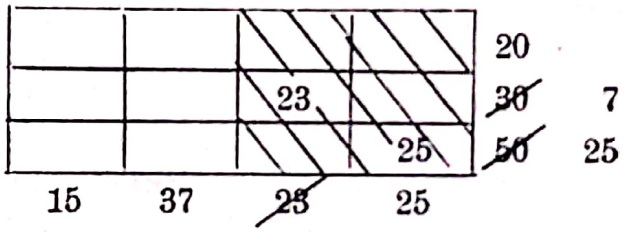
Tabelul II.3.51



Se va renunța deci și la coloana a patra a tabelului, ajungînd la tabelul II.3.52. În acest tabel, pentru căsuțele rămase nehașurate, cel mai mic cost unitar de transport îl are căsuța (A_3, B_1), în care punem:

$$x_{31} = \min\{a_3 - x_{34}; b_1\} = \min\{50-25, 15\} = 15.$$

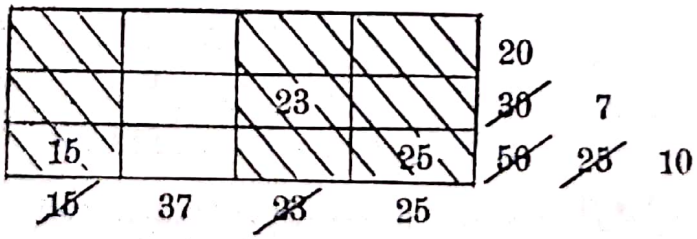
Tabelul II.3.52



Sîntem, deci, în fața tabelului II.3.53. Aci, deoarece a rămas de completat numai coloana a doua, cele 37 de unități necesare în B_2, nu pot veni decît punînd:

$$x_{12} = 20, \quad x_{22} = 7, \quad x_{32} = 10.$$

Tabelul II.3.53



S-a obținut astfel soluția realizabilă din tabelul II.3.54, care este o soluție de bază.

Tabelul II.3.54

X_0':

	20		
	7	23	
15	10		15

Scanned with OKEN Scanner

Observații. 1. Nici în aplicarea practică a acestei a doua metode, nu este nevoie să se facă efectiv hașuri, ci să se observe de fiecare dată, care este partea de tabel ce a rămas în discuție.

2. Dacă prin folosirea oricărei metode se obține o soluție cu mai puțin decit $(m + n - 1)$ căsuțe ocupate, această soluție este degenerată. Un astfel de caz poate să apară atunci cînd există cel puțin o egalitate între suma unui număr oarecare de cantități a_i și suma unui număr oarecare de cantități b_j, cu excepția egalității de echilibru pentru întreaga problemă.

(ii) Pentru a cerceta dacă o soluție de bază poate fi îmbunătățită (găsind alta, ce dă funcției de eficiență o valoare mai mică), vom presupune mai întîi că această soluție este nedegenerată, deci că matricea (soluția) X cercetată are exact $(m + n - 1)$ căsuțe ocupate. Trecerile, de la o bază la alta (deci de la o soluție de bază la alta) se fac înlocuind un vector din vechea bază cu un altul, care nu era înainte în bază. Cu alte cuvinte, pornind de la o anumită soluție de bază X, pentru a determina o altă soluție de bază trebuie pe de o parte să ocupăm o căsuță care era liberă în soluția X, iar pe de altă parte să eliberăm o căsuță ocupată a soluției X, astfel încît numărul total al căsuțelor ocupate să rămînă egal cu $(m + n - 1)$ în cazul soluțiilor nedegenerate. Vom arăta cum se face această transformare, pe baza unui exemplu numeric, din care vom extrage apoi metoda generală. Pe acest exemplu, scoatem în evidență, de asemenea, interpretarea vectorială a soluțiilor cu care lucrăm. Fie deci problema de transport cu datele din tabelul II.3.55, un plan

Tabelul II.3.55

2	5	3	50
4	2	4	50
25	60	15	100

de transport oarecare. În tabel această problemă se scrie sub forma unei matrice, de forma celei din tabelul II.3.56 unde,

Tabelul II.3.56

X:

x_{11}	x_{12}	x_{13}
x_{21}	x_{22}	x_{23}

Scanned with OKEN Scanner

de exemplu x_{11} reprezintă cantitatea ce pleacă din A_1 spre B_1, x_{23} reprezintă cantitatea ce pleacă din A_2 spre B_3 ș.a.m.d. Modelul matematic al acestei probleme se scrie astfel:

$$[\min] f(X) = 2x_{11} + 5x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 2x_{22} + 4x_{23}$$
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 50$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50$$
$$x_{11} + x_{21} = 25$$
$$x_{21} + x_{22} = 60$$
$$x_{31} + x_{32} = 15$$
$$x_{ij} \geqslant 0,\ i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3.$$

Din sistemul de restricții, renunțăm la ultima ecuație, ea fiind o consecință a celorlalte ecuații. Matricea A, corespunzătoare sistemului de patru restricții rămase, este următoarea:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right). \end{array}$$

Coloanele acestei matrice sînt vectori în spațiul R^4, ei fiind notați deasupra matricei, conform convenției din capitolul I, anume: a_{ij} este vectorul-coloană ce conține coeficienții variabilei (necunoscutei) x_{ij} din sistem. Rezultă că unei căsuțe (A_i, B_j), din tabelul ce dă o soluție X, îi corespunde atît variabila x_{ij}, cît și vectorul a_{ij}, al matricei A. Să considerăm, de pildă, soluția problemei date, obținută prin metoda colțului nord-vest, care se găsește în tabelul II.3.57.

Tabelul II.3.57

X_0:	25	25	
		35	15

Costul total de transport, corespunzător cu acest plan, este:

$$f(X_0) = 2 \cdot 25 + 5 \cdot 25 + 2 \cdot 35 + 4 \cdot 15 = 305 \text{ u.b.}$$

Soluția X_0 conține $m + n - 1 = 1 = 2 + 3 - 1 = 4$ componente diferite de zero, care sînt:

$$x_{11} = 25;\ x_{12} = 25;\ x_{22} = 35;\ x_{23} = 15.$$

Scanned with OKEN Scanner

Vectorii coloane corespunzători, din matricea A, au forma:

$$a_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_{23} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cititorul poate verifica faptul că ei sînt liniar independenți, formînd o bază în R^4. Prin urmare, soluția X_0 este o soluție de bază, baza corespunzătoare fiind $B_0 = \{a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{23}\}$. De altfel, după cum s-a afirmat mai sus, cele două metode prezentate, pentru găsirea unei soluții inițiale, conduc totdeauna la soluții de bază.

Pentru a găsi o altă soluție de bază pornind de la X_0, vom încerca să ocupăm fie căsuța (A_2, B_1), fie căsuța (A_1, B_3), singurele care sînt libere în soluția cercetată. Să luăm, de pildă, cazul cînd vrem să scriem în căsuța (A_2, B_1) o valoare θ, deocamdată nedeterminată (adică să facem pentru noua soluție $x_{21} = \theta$). Să observăm însă că, în acest fel, se strică echilibrul atît pe linia a doua, cît și pe coloana întîia. Va trebui deci să modificăm încă unele dintre vechile valori, așa cum se arată mai jos:

— deoarece s-a mărit suma valorilor de pe coloana întîi cu θ, pentru a restabili echilibrul pe coloana în cauză, vom scădea pe θ din componenta $x_{11} = 25$, punînd $x_{11} = 25 - \theta$,

— deoarece în acest fel s-a stricat echilibrul pe linia întîi, îl refacem adăugînd valoarea θ la componenta $x_{12} = 25$, adică punem $x_{12} = 25 + \theta$,

— deoarece acum s-a stricat echilibrul pe coloana a doua pentru a-l reface, scădem valoarea θ din componenta $x_{22} = 35$, punînd $x_{22} = 35 - \theta$,

— această ultimă modificare reface și echilibrul de pe linia a doua, care se stricase inițial,

— componenta x_{23} rămîne neschimbată, adică $x_{23} = 25$. Modificările descrise se fac chiar pe soluția X_0, în modul indicat de tabelul II.3.58.

Tabelul II.3.58

	$25-\theta$	$25+\theta$
	θ	$35-\theta$

Scanned with OKEN Scanner

Cititorul poate observa, făcînd sumele pe linii și pe coloane, că noile valori verifică restricțiile modelului, oricare ar fi valoarea atribuită lui θ. Se spune că această cantitate θ s-a deplasat de-a lungul unui *ciclu* (trasat cu linii subțiri pe matricea de mai sus). După cum se vede, un astfel de ciclu pornește dintr-o căsuță liberă și merge pe linii și pe coloane alternativ, oprindu-se (avînd vîrfurile) numai în căsuțe ocupate. Deoarece valorile $+\theta$ și $-\theta$, ce se scriu în vîrfurile ciclului, au rostul compensării, pentru restabilirea echilibrului pe linii sau pe coloane, o latură a ciclului poate sări peste căsuțe libere sau ocupate, importante fiind doar vîrfurile lui (căsuțele în care se oprește și își schimbă direcția). De asemenea, ciclul poate avea și o formă mai complicată decît în exemplul nostru, avînd mai mult decît patru vîrfuri. În ceea ce privește posibilitatea găsirii unui ciclu, pornind de la o căsuță liberă oarecare, a unei soluții realizabile de bază, se poate arăta că, dacă soluția realizabilă de bază este nedegenerată, fiecărei căsuțe libere îi corespunde un ciclu de felul indicat și numai unul singur.

Revenind la ciclul obținut în exemplul cercetat, observăm că cea mai mare valoare ce se poate atribui lui θ este egală cu 25. Într-adevăr, conform condițiilor de nenegativitate, ce trebuie verificate și pentru soluția X', urmează să avem simultan:

$$x_{21} = \theta \geqslant 0, \quad x_{11} = 25 - \theta \geqslant 0, \quad x_{12} = 25 + \theta \geqslant 0,$$
$$x_{22} = 35 - \theta \geqslant 0,$$

de unde rezultă $0 \leqslant \theta \leqslant 25$. Dînd lui θ valoarea 25, observăm că se eliberează căsuța (A_1, B_1) a tabelului, ceea ce realizează a doua dorință a noastră, de a păstra numărul căsuțelor ocupate. Folosind limbajul vectorial, spunem că a intrat în bază vectorul a_{21} și a ieșit din bază vectorul a_{11}. Făcînd calculele, obținem soluția de bază, care corespunde la baza $B_1 = \{a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{23}\}$ și care se găsește în tabelul II.3.59.

Tabelul II.3.59

X_1:

	50	
25	10	15

Să cercetăm dacă această soluție este mai bună decît cea anterioară. Pentru aceasta, este suficient să vedem cum variază valoarea funcției de eficiență, prin deplasarea unei

Scanned with OKEN Scanner

singure unități de produs de-a lungul ciclului folosit, pentru θ unități avînd, evident, o variație de θ ori mai mare (și de același sens). Presupunînd deci $\theta = 1$, funcție de eficiență:

— crește cu $c_{21} = 4$, datorită creșterii componentei x_{21} cu o unitate,

— scade cu $c_{11} = 2$, datorită micșorării componentei x_{11} cu o unitate,

— crește cu $c_{12} = 5$, datorită creșterii componentei x_{12} cu o unitate.

— scade cu $c_{22} = 2$, datorită micșorării componentei x_{22} cu o unitate.

Notînd cu Δ_{21} variația valorii funcției de eficiență, atunci cînd se deplasează o unitate de produs de-a lungul ciclului corespunzător căsuței (A_2, B_1), avem:

$$\Delta_{21} = c_{21} - c_{11} + c_{12} - c_{22} = 4 - 2 + 5 - 2 = 5.$$

Această variație fiind pozitivă, înseamnă că transformarea propusă nu este convenabilă făcînd să crească valoarea funcției de eficiență (costul total de transport).

Observație. Ciclul folosit mai sus (și în general orice ciclu) nu are un sens preferențial, putînd face operațiile de adunare și scădere succesivă a cantității θ și în ordinea: (A_2, B_1), (A_2, B_2), (A_1, B_2), (A_1, B_1). Se poate observa ușor că valoarea variației costului, Δ_{21}, nu se schimbă în acest fel, observația fiind generală.

Să cercetăm acum, dacă cea de a doua posibilitate de a trece de la X_0 la altă soluție realizabilă de bază, face ca valoarea funcției de eficiență să se micșoreze sau nu. Evident, nu vom mai face toate transformările, ci vom calcula direct variația Δ_{13}, a valorii funcției de eficiență, atunci cînd o unitate de produs este deplasată de-a lungul ciclului corespunzător căsuței (A_1, B_3). Ciclul respectiv este reprezentat în tabelul II.3.60 prin linii subțiri. Avem deci:

$$\Delta_{31} = c_{31} - c_{32} + c_{22} - c_{21} = 3 - 4 + 2 - 5 = -4.$$

Deoarece

Tabelul II.3.60

25	$25 - \theta$	θ
	$35 + \theta$	$15 - \theta$

Scanned with OKEN Scanner

această variație este negativă, înseamnă că această a doua posibilitate face ca valoarea funcției de eficiență să scadă. Se observă, din tabelul II.3.60, că pentru θ putem lua o valoare cel mult egală cu 15. Luînd $\theta = 15$, valoarea funcției de eficiență va scădea cu $|\Delta_{31}| \cdot \theta = 4 \cdot 15 = 60$ unități, iar noua soluție va fi realizabilă de bază. Ea are forma din tabelul II.3.61,

Tabelul II.3.61

X_2:

25	10	15
	50	

iar $f(X_2) = f(X_0) - 60 = 305 - 60 = 245$. Pentru a cerceta dacă și această soluție poate fi îmbunătățită, se calculează variațiile valorii funcției de eficiență, corespunzătoare căsuțelor libere (A_2, B_1) și (A_2, B_3). Cititorul poate găsi ușor, pe matricea X_2:

$$\Delta_{21} = c_{21} - c_{11} + c_{12} - c_{22} = 4 - 2 + 5 - 2 = 5,$$
$$\Delta_{23} = c_{23} - c_{13} + c_{12} - c_{22} = 4 - 3 + 5 - 2 = 4$$

Deoarece ambele variații sînt nenegative, valoarea funcției de eficiență nu mai poate fi îmbunătățită și deci soluția X_2 este optimă.

Sintetizînd și generalizînd cele de mai sus, deducem că pentru cercetarea posibilității de îmbunătățire a unei soluții realizabile de bază nedegenerate, putem proceda astfel:

a) Pentru fiecare căsuță liberă căutăm ciclul corespunzător și calculăm apoi evaluarea respectivă (variația valorii funcției de eficiență, pentru căsuța în cauză).

b) Dacă toate evaluările căsuțelor libere sînt pozitive sau nule (într-un cuvînt nenegative), soluția cercetată este optimă.

c) Dacă există și căsuțe cu evaluări negative, alegem una dintre ele (se indică cea cu evaluarea negativă cea mai mare în valoare absolută) și deplasăm θ unități de produs de-a lungul ciclului corespunzător căsuței alese.

d) Alegem drept valoare pentru θ, pe cea mai mică componentă x_{ij}, din care trebuie să se scadă θ unități.

e) Facem înlocuirile, calculăm și obținem noua soluție realizabilă de bază.

f) Calculăm valoarea corespunzătoare a funcției de eficiență, variația totală a ei fiind egală cu produsul dintre modulul evaluării căsuței folosite și valoarea dată lui θ.

Scanned with OKEN Scanner

Metoda descrisă conduce la dificultăți mari de calcul, chiar la modele nu foarte mari, trebuind să construim de fiecare dată ciclurile corespunzătoare multor căsuțe libere. De aceea, evaluările Δ_{ij}, atașate unei soluții realizabile de bază X, se calculează cu ajutorul altei metode, ce se bazează pe teorema ce urmează.

Teorema II.3.2. O soluție X este optimă pentru modelul M, dacă și numai dacă ea este optimă și pentru un model dedus din M, înlocuind funcția de eficiență prin:

$$[\min] f^*(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^* \cdot x_{ij}, \qquad \text{(II.3.6)}$$

unde $c_{ij}^* = c_{ij} - (u_i + v_j)$, cu u_i, v_j constante arbitrare, $i = 1, 2, 3, \ldots, m$; $j = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Pentru justificarea acestei teoreme, să efectuăm un calcul al valorii funcției de eficiență $f^*(X)$, cu valorile menționate pentru coeficienții c_{ij}^*, $i = 1, 2, 3, \ldots, m$; $j = 1, 2, 3, \ldots, n$:

$$f^*(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} - u_i - v_j) x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} -$$

$$- \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} u_i x_{ij} - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} v_j x_{ij}.$$

Observăm că prima parte a expresiei găsite reprezintă valoarea $f(X)$, a vechii funcții de eficiență. De asemenea, în ultima parte a expresiei este util să schimbăm ordinea celor două sume. Aplicînd proprietățile calculului cu sume și folosind relațiile (II.3.2) și (II.3.3), obținem succesiv:

$$f^*(X) = f(X) - \sum_{i=1}^{m} u_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \right) - \sum_{j=1}^{n} v_j \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \right) =$$

$$= f(X) - \sum_{i=1}^{m} u_i a_i - \sum_{j=1}^{n} v_j b_j.$$

Ținînd seama de faptul că u_i și v_j, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, sînt constante, putem considera ca o constantă K, următoarea valoare:

$$K = \sum_{i=1}^{m} u_i a_i + \sum_{j=1}^{n} v_j b_j,$$

ceea ce înseamnă că putem scrie:

$$f^*(X) = f(X) - K. \qquad \text{(II.3.7)}$$

Scanned with OKEN Scanner

De aci rezultă concluziile teoremei, deoarece:

— fiecărei soluții X îi corespunde o valoare a funcției $f(X)$, precum și o valoare diminuată cu K unități, a funcției $f^*(X)$,

— orice soluție, $\bar{X}$, ce dă o valoare minimă funcției $f(X)$, va da o valoare minimă (dar cu K unități mai mică) și funcției $f^*(X)$,

— orice soluție $\bar{X}$, ce dă o valoare minimă funcției $f^*(X)$, va da o valoare minimă (dar cu K unități mai mare) și funcției $f(X)$.

Impunînd funcției de eficiență (II.3.6) condiții suplimentare de forma $c_{ij}^* \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, este evident că valoarea minimă a ei nu poate fi negativă. Ne punem problema posibilității determinării unor valori u_i și v_j, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, astfel încît valoarea minimă a funcției $f^*(X)$ să fie egală cu zero. Acest lucru este posibil dacă avem:

$$c_{ij}^* x_{ij} = 0, \text{ pentru fiecare căsuță } (A_i, B_j), \qquad \text{(II.3.8)}$$

$$c_{ij}^* \geqslant 0, \text{ pentru fiecare căsuță } (A_i, B_j). \qquad \text{(II.3.9)}$$

Aceasta înseamnă că pentru fiecare căsuță, în care există o valoare $x_{ij} \neq 0$ să avem $c_{ij}^* = 0$, pentru celelalte căsuțe relația (II.2.8) verificîndu-se de la sine. Cum în soluția X avem $(m + n - 1)$ căsuțe cu valori $x_{ij} \neq 0$, primele condiții ce se impun sînt reprezentate prin următorul sistem de $(m + n - 1)$ ecuații, cu $(m + n)$ necunoscute:

$c_{ij}^* = 0$, sau echivalent: $u_i + v_j = c_{ij}$, pentru toate căsuțele cu $x_{ij} \neq 0$.

Or, este ușor de văzut că un asemenea sistem se poate rezolva, dînd mai întîi uneia dintre necunoscutele sale (oarecare) o valoare arbitrară, de exemplu $u_1 = 0$. În plus, dacă valorile obținute pentru u_i și v_j verifică și condițiile (II.2.9), adică $c_{ij} - (u_i + v_j) \geqslant 0$, pentru toate perechile de indici (i, j), $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, pentru soluția X funcția $f^*(X)$ își atinge o valoare minimă egală cu zero, iar funcția $f(X)$ are, de asemenea, o valoare minimă, ce se calculează conform relației (II.2.7).

Valorile $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$ sînt tocmai evaluările căsuțelor, egale cu variațiile de valori ale funcției de eficiență, din metoda descrisă anterior, evaluări pe care le vom numi și *diferențe*. S-a regăsit deci proprietatea că, dacă toate diferențele Δ_{ij} sînt nenegative, soluția X, ce se cercetează, este optimă pentru modelul M. Dacă există însă diferențe strict

Scanned with OKEN Scanner

negative, considerînd una dintre ele (de exemplu, cea mai mare în modul), să zicem Δ_{sr}, vom încerca să o mărim, aducînd-o la valoarea zero. Aceasta se poate dacă relația corespunzătoare, $u_s + v_r < c_{sr}$, se transformă în egalitate: $u_s + v_r = c_{sr}$. Cu alte cuvinte, vom căuta ca această ecuație să apară în viitor printre ecuațiile sistemului:

$u_i + v_j = c_{ij}$, pentru toate căsuțele cu $x_{ij} \neq 0$.

Acest fapt se realizează făcînd ca x_{sr} să devină nenul, deci introducînd vectorul a_{sr} în bază. Transformarea se face ca în metoda precedentă.

Exemplu. Să reluăm rezolvarea problemei de transport din exemplul precedent, pornind de la aceeași soluție de bază inițială, X_0, ce se găsește în tabelul II.3.57. Pentru a determina valorile u_i, $i = 1, 2$ și v_j, $j = 1, 2, 3$, rezolvăm sistemul format din ecuațiile următoare:

$u_1 + v_1 = 2$, ecuație corespunzătoare lui $x_{11} = 25 \neq 0$
$u_1 + v_2 = 5$, ecuație corespunzătoare lui $x_{12} = 25 \neq 0$
$u_2 + v_2 = 2$, ecuație corespunzătoare lui $x_{22} = 35 \neq 0$
$u_2 + v_3 = 4$, ecuație corespunzătoare lui $x_{23} = 15 \neq 0$

Luînd $u_1 = 0$, obținem succesiv:

— din ecuația întîia: $v_1 = 2$,
— din ecuația a doua: $v_2 = 5$,
— din ecuația a treia: $u_2 = -3$,
— din ecuația a patra: $v_3 = 7$.

Aceste valori se pot calcula mai ușor, chiar fără a mai scrie efectiv sistemul, pe o matrice de forma celei din tabelul II.3.62, în care inițial s-au scris numai costurile unitare de transport, în căsuțele (*1*, *1*), (*1*, *2*), (*2*, *2*) și (*2*, *3*), corespunzătoare componentelor $x_{ij} \neq 0$. Pentru a deosebi aceste costuri de valorile ce se vor scrie ulterior în același tabel, ele s-au marcat prin steluțe. De asemenea, pe marginea din stînga a tabelului trebuind să punem valorile u_1 și u_2, s-a și scris valoarea $u_1 = 0$, pe care o luăm arbitrar. În plus, deasupra tabelului s-au lăsat locuri pentru completarea valorilor v_1, v_2 și v_3. În scopul rezolvării sistemului $u_i + v_j = c_{ij}$,

Tabelul II.3.62

u_i \ v_j			
0	2*	5*	
		2*	4*

pentru căsuțele cu costuri completate, procedăm așa cum se arată în continuare. De fiecare dată ne îndreptăm atenția asupra unei valori cu steluță din tabel, pentru care este calculată una din valorile laterale ale tabelului, fie cea din stînga liniei respective (u_i), fie cea de deasupra coloanei respective (v_j): valoarea din căsuță fiind suma celor două valori laterale și cunoscînd una dintre acestea, se determină cealaltă. De exemplu, valorii 2, din stînga-sus a tabelului, îi corespunde în stînga $u_1 = 0$, deci deasupra tabelului (pe prima coloană) punem $v_1 = 2$. De asemenea, în stînga valorii 5 din tabel, există tot $u_1 = 0$, deci deasupra coloanei a doua scriem $v_2 = 5$. Apoi, corespunzător valorii $c_{22} = 2$, deoarece deasupra coloanei a doua este acum valoarea $v_2 = 5$, în stînga liniei a doua trebuie să scriem $u_2 = -3$. În sfîrșit, avînd $u_2 = -3$, deasupra celei de a treia coloane, urmează să punem $v_3 = 7$. Se obține astfel tabelul II.3.63.

Tabelul II.3.63

u_i \ v_j	2	5	7
0	2*	5*	7*
−3		2*	4*

Vom completa acum fiecare dintre celelalte căsuțe libere, ale acestui tabel, cu sume de forma $u_i + v_j$, unde u_i este valoarea de pe linia căsuței respective, iar v_j valoarea de deasupra acestei căsuțe. Se obține în acest fel așa-numita *matrice a costurilor* fictive, pe care o notăm cu $\bar{C}$, în exemplul nostru, cea din tabelul II.3.64.

Tabelul II.3.64

$\bar{C}$:

u_i \ v_j	2	5	7
0	2	5	7
−3	−1	2	4

Atenție: O verificare a acestei matrice, în totalitate, se poate face la sfîrșitul completării ei, în fiecare căsuță (A_i, B_j) trebuind să fie scrisă suma corespunzătoare $u_i + v_j$. Pentru siguranța corectitudinii calculelor, cititorul este sfătuit să

Scanned with OKEN Scanner

facă această verificare de fiecare dată, după completarea unei astfel de matrici.

Cu ajutorul matricei costurilor fictive, se calculează ușor o matrice care conține toate diferențele Δ_{ij}, efectuînd diferența a două matrice și anume: $C - \bar{C}$, ca în tabelul II.3.65.

Tabelul II.3.65

$\Delta = C - \bar{C}$:

0*	0*	—4
5	0*	0*

Evident, deoarece valorile $\bar{c}_{ij}$ cu steluțe coincid cu valorile c_{ij} (așa fiind luate inițial), în căsuțele ce conțineau aceste costuri vor apărea zerouri în matricea $C - \bar{C}$: le vom pune și lor steluțe, pozițiile acestor steluțe fiind acelea ce corespund vectorilor ce formează baza soluției cercetate. Privind matricea diferențelor, observăm că soluția X_0 nu este optimă, deoarece există diferența Δ_{13} strict negativă. Continuarea calculelor se face ca și în metoda anterioară.

Sintetizăm cele de mai sus, descriind pașii metodei descrise, care poartă numele de *algoritmul potențialelor*:

Pasul 0. Se determină o soluție de bază inițială, X_0.

Pasul 1. Considerînd o soluție realizabilă de bază nedegenerată, X, se determină cantitățile u_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ și v_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, rezolvînd sistemul $u_i + v_j = c_{ij}$, pentru toate căsuțele pentru care $x_{ij} > 0$. Pentru rezolvarea sistemului se pune, mai întîi, $u_1 = 0$. Cu aceste valori se calculează matricea $\bar{C} = (\bar{c}_{ij})$, unde $\bar{c}_{ij} = u_i + v_j$, $i = 1, 2, \ldots, m$ și $j = 1, 2, \ldots, n$.

Pasul 2. Se calculează matricea diferențelor, $C - \bar{C}$, obținînd una dintre următoarele situații:

(a) Toate elementele matricei: $C - \bar{C}$ sînt nenegative (nu există diferențe strict negative). Soluția cercetată este optimă și algoritmul ia sfîrșit.

(b) Există diferențe negative. Fie $\Delta_{sr} < 0$ (de exemplu, cea mai mare în valoare absolută). Se trece la pasul următor.

Pasul 3. Punem $x_{sr} = \theta > 0$. Se construiește ciclul corespunzător căsuței (A_s, B_r), deplasînd θ unități de-a lungul lui. Se înlocuiește apoi θ cu cea mai mică valoare x_{ij}, din care trebuie scăzut θ.

Pașii 1, 2 și 3 se aplică succesiv, de cîte ori este nevoie, începînd cu testarea și îmbunătățirea eventuală a soluției X_0, pînă cînd, în cadrul cercetării unei soluții, obținem toate diferențele nenegative.

Scanned with OKEN Scanner

Observație. La pasul 1, pentru rezolvarea sistemului $u_i + v_j = c_{ij}$, pentru $x_{ij} > 0$, se poate porni cu o valoare arbitrară, atribuită oricărei necunoscute, valorile diferențelor ce se obțin în final fiind aceleași.

Cazul cînd modelul admite și soluții degenerate. Metoda descrisă mai sus cere ca toate soluțiile realizabile de bază, ce apar și sînt testate succesiv, să fie nedegenerate. Dacă sîntem conduși la un moment dat să cercetăm o soluție degenerată a modelului (cu mai puțin de $m + n - 1$ căsuțe ocupate), metoda prezentată nu mai ajută, existînd căsuțe libere ale soluției, pentru care nu se poate determina nici un ciclu. De aceea trebuie făcută o adaptare a algoritmului, în cazul apariției unei soluții degenerate. Deosebim două cazuri în acest sens și anume: (1) cînd soluția degenerată apare pe parcursul aplicării algoritmului și (2) cînd soluția degenerată apare la început, ca soluție realizabilă de bază inițială.

(1) Fie că soluția realizabilă de bază X este nedegenerată, dar ciclul folosit are o asemenea formă, încît prin înlocuirea valorii θ, se anulează două sau mai multe componente ale soluției noi deodată. Într-o asemenea situație, nu lăsăm libere toate aceste căsuțe, ci numai una dintre ele, în celelalte scriind cîte un zero. Asemenea zerouri, ce se scriu efectiv, se numesc *zerouri esențiale*, și sînt considerate componente bazice, ca și valorile diferite de zero. Astfel, numărul căsuțelor ocupate rămîne tot mereu egal $(m + n - 1)$. Evident, în sistemul $u_i + v_j = c_{ij}$, pentru $x_{ij} > 0$, includem, de această dată, și ecuațiile corespunzătoare valorilor egale cu zerouri esențiale. De asemenea, căsuțele cu zerouri esențiale considerîndu-se ocupate, pot fi folosite ca vîrfuri ale ciclului căutat.

Exemplu. Fie soluția realizabilă de bază, nedegenerată din tabelul II.3.66, tabel în care este construit ciclul cores-

Tabelul II.3.66

X:

$20+\theta$		$50-\theta$	
	$30+\theta$		$80-\theta$
	$50-\theta$	θ	
$50-\theta$			$50+\theta$

Scanned with OKEN Scanner

punzător căsuței (A_3, B_3). Făcînd $\theta = 50$, se anulează trei variabile deodată, ceea ce înseamnă că noua soluție va fi degenerată. Nu vom elibera toate aceste trei căsuțe, ci numai una, în celelalte scriind zerouri esențiale. Astfel, de pildă, lăsînd să se elibereze căsuța (A_1, B_3) obținem soluția degenerată din tabelul II.3.67.

Tabelul II.3.67

70			
	80		30
	0	50	
0			100

Observație. Alegerea căsuțelor, în care se pun zerouri esențiale, poate fi făcută comparînd costurile unitare de transport ale componentelor ce se anulează: punem zerouri esențiale în căsuțele cu costurile cele mai mici. Evident, această alegere se poate face și în mod arbitrar, mai ales cînd prin compararea indicată mai sus nu se poate decide.

(2) Dacă soluția realizabilă de bază degenerată apare ca soluție inițială, ea trebuie completată cu zerouri esențiale, pentru a avea $(m + n - 1)$ căsuțe ocupate. Aceste zerouri esențiale trebuie însă puse cu grijă, astfel încît vectorii corespunzători tuturor căsuțelor ocupate să fie liniar independenți (să formeze o bază). În acest scop, se poate proceda astfel *(metoda perturbării)*:

— la fiecare cantitate disponibilă a_i, se adună cîte o cantitate $\varepsilon > 0$, presupusă foarte mică,

— pentru echilibrare, se adaugă $m\varepsilon$ la ultima cantitate necesară, b_n,

— se determină o soluție realizabilă de bază inițială pe problema obținută, soluție ce va depinde evident de ε,

— în soluția obținută (care este sigur nedegenerată), se face $\varepsilon = 0$, păstrînd ocupate toate cele $(m + n - 1)$ căsuțe apărute mai sus.

În această metodă s-au efectuat modificări imperceptibile practic, ale datelor problemei, care au permis să apară cantități foarte mici în anumite căsuțe (de exemplu ε, 2ε, $\beta\varepsilon$ etc.), cantități ce sînt transformate în zerouri esențiale.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu. Fie problema de transport din tabelul II.3.68, care prin echilibrare conduce la datele din tabelul II.3.69.

Tabelul III.3.68

5	4	2	200
3	5	4	200
4	4	3	100
300	200	100	

→

Tabelul II.3.69

5	4	2	200
3	5	4	200
4	4	3	100
0	0	0	100
300	200	100	

O soluție realizabilă de bază, calculată prin metoda elementului minim al matricei, este cea din tabelul II.3.70.

Tabelul II.3.70

X_0:

	100	100
200		
	100	
100		

Această soluție are numai cinci căsuțe ocupate. Pentru a obține $m + n - 1 = 4 + 3 - 1 = 6$ căsuțe ocupate, aplicăm aceeași metodă a elementului minim al matricei, pe problema perturbată, ca în tabelul II.3.71.

Tabelul II.3.71

$X_0(\varepsilon)$:

	$100 - 3\varepsilon$	$100 + 4\varepsilon$	$200 + \varepsilon$
$200 - \varepsilon$	2ε		$200 + \varepsilon$
	$100 + \varepsilon$		$100 + \varepsilon$
$100 + \varepsilon$			$100 + \varepsilon$
300	200	$100 + 4\varepsilon$	

Făcînd aci $\varepsilon = 0$, soluția X_0 se poate scrie evidențiind toți cei șase vectori ai bazei respective, ca în tabelul II.3.72.

Tabelul II.3.72

X_0:

	100	100
200	0	
	100	
100		

Scanned with OKEN Scanner

Cazul cînd modelul are soluție optimă multiplă. Dacă, în cercetarea unei soluții optime, găsim una sau mai multe diferențe nule, corespunzătoare unor vectori ce nu fac parte din bază (diferențe egale cu zerouri fără steluțe în matricea $C - \bar{C}$), deducem că mai există și alte soluții optime de bază. Pentru a le găsi, continuăm aplicarea algoritmului, introducînd în bază unul sau altul dintre vectorii corespunzători căsuțelor în cauză (pe rînd, pornind de la aceeași soluție optimă). Eventual, de la fiecare dintre soluțiile optime nou obținute, se pot calcula și alte soluții optime de bază aplicînd aceeași metodă, dar evitînd repetarea unor soluții deja găsite. Să notăm cu X_1, X_2, ..., X_k, toate soluțiile optime de bază, determinate în acest mod. Conform teoremei I.2.4, mulțimea tuturor soluțiilor optime ale problemei (de bază sau nu) este convexă, avînd soluțiile găsite mai sus ca vîrfuri. Astfel, soluția optimă generală a problemei are forma:

$$\bar{X} = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_k X_k, \text{ cu } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \geqslant 0 \text{ și}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

Exemplu. Fie problema de transport echilibrată, cu datele din tabelul II.3.73. Soluția X_0, aflată prin metoda colțului

Tabelul II.3.73

4	2	20
5	3	30
15	35	50

nord-vest, este cea din tabelul II.3.74, lîngă ea existînd alte două matrice, cu care se testează optimalitatea ei.

Tabelul II.3.74

X_0		u_i \ v_j	4	2		$\Delta = C - \bar{C}$	
15	5	0	4*	2*		0*	0*
	30	1	5	3*		0	0*

Rezultă că soluția X_0 este o soluție optimă la bază. Observăm însă că există diferența $\Delta_{21} = 0$, corespunzătoare căsuței libere (A_2, B_1) din soluția X_0. Introducînd vectorul a_{21} în bază, se obține o altă soluție optimă, X_1, care este testată

Scanned with OKEN Scanner

în tabelul II.3.75. Este evident că, dacă am repeta procedeul, pornind de la soluția X_1, am regăsi soluția X_0, ceea ce înseamnă că X_0 și X_1 sînt singurele soluții optime de bază.

Tabelul II.3.75

X_1		u_i \ v_j	4	2		$\Delta = C - \bar{C}$	
	20	0	4	2*		0	0*
15	15	1	5*	3*		0*	0*

Soluția optimă generală a problemei va fi dată de $\bar{X} = \lambda X_0 + (1 - \lambda)X_1$, cu $\lambda \in [0, 1]$. Scriind pe componente aceste soluții, ordinea componentelor fiind x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, avem:

$$\bar{X} = \lambda \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15\ \lambda \\ 20 - 15\ \lambda \\ 15 - 15\ \lambda \\ 15 + 15\ \lambda \end{pmatrix}, \text{ cu } \lambda \in [0, 1].$$

Ca matrice, această soluție generală se scrie ca în tabelul II.3.76.

Tabelul II.3.76

$15\ \lambda$	$20 - 15\ \lambda$
$15 - 14\ \lambda$	$15 + 15\ \lambda$

, cu $\lambda \in [0, 1]$.

Ca exemplu, dăm o soluție optimă, care nu este de bază (obținută pentru $\lambda = 1/3$); ea este cea din tabelul II.3.77.

Tabelul II.3.76

X':

5	15
10	20

Cititorul poate verifica faptul că această soluție dă funcției de eficiență o valoare minimă, egală cu cea obținută în cazul soluțiilor optime de bază X_0 și X_1:

$$f(X') = f(X_0) = f(X_1) = 160.$$

Probleme de tip „Transport". Un mare număr de probleme practice, care nu au enunțul dat la începutul acestui paragraf, se rezolvă totuși cu ajutorul algoritmilor prezentați în paragraful de față. Acest lucru se datorează faptului că,

Scanned with OKEN Scanner

deşi problemele în cauză nu sînt probleme de transport, modelele lor matematice coincid cu cele ale modelelor de distribuire sau sînt foarte apropiate de acestea. Evident, cînd modelul matematic al unei astfel de probleme de tip „transport" se deosebeşte puţin de cel al unui model de distribuire, va trebui să modificăm în sensul cerut şi algoritmul de rezolvare, adaptîndu-l noii situaţii. De asemenea, facem menţiunea că uneori, aranjarea datelor problemei, sub o formă adecvată scrierii imediate a modelului matematic ca un model de distribuire, cere anumite eforturi de interpretare a acestor date şi de exprimare a lor, în mod corespunzător scopului urmărit.

Exemplu. În fiecare dintre fabricile F_1, F_2 şi F_3, se pot fabrica produse de tipurile P_1, P_2 şi P_3. Datorită condiţiilor specifice, existente în cele trei fabrici, ele pot obţine beneficii unitare nete diferite la fabricarea aceluiaşi tip de produs, conform tabelului II.3.78. Tabelul mai conţine, în partea

Tabelul II.3.78

F_i \ P_j	P_1	P_2	P_3	Cap.
F_1	8	5	7	200
F_2	6	5	6	300
F_3	7	7	5	500
Nec.	250	320	360	1000
				930

dreaptă a sa, capacităţile maxime de producţie ale fabricilor în toate cele trei tipuri de produse (capacităţi globale), precum şi cantităţile totale necesare din produsele P_1, P_2 şi P_3. Astfel, de pildă, dacă fabrica F_1 produce şi vinde o unitate din P_2, ea obţine un beneficiu net de 5 unităţi băneşti (elementul din tabel, aflat la intersecţia liniei F_1 cu coloana P_2); de asemenea, F_1 poate produce cel mult 200 de unităţi din toate cele trei tipuri de produse (prima valoare de pe coloana „capacităţilor"), iar cantitatea totală necesară din produsul P_1 este de 250 unităţi (prima valoare de pe linia „necesarului").

În condiţiile date, se cere să se efectueze o planificare a fabricării celor trei tipuri de produse, de către fabricile F_1, F_2 şi F_3, care să asigure cantităţile necesare şi care să conducă, pe ansamblu, la un beneficiu total maxim.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Vom considera cele trei fabrici ca pe trei „centre producătoare", cantitățile disponibile fiind date de capacitățile maxime ale fabricilor. Deoarece totalul disponibil este mai mare decît totalul necesar, vom introduce un produs fictiv P_4, din care trebuie să se „fabrice" diferența de 70 unități. Evident, cantitățile „fabricate" din P_4 sînt în realitate capacități rămase nefolosite din capacitățile maxime ale fabricilor; beneficiile unitare nete, corespunzătoare lor, vor fi deci nule. Se obține astfel problema echilibrată, cu datele din tabelul II.3.79. Dacă la această problemă notăm

Tabelul II.3.79

F_i \ P_j	P_1	P_2	P_3	P_4	Cap.
F_1	8	5	7	0	200
F_2	6	5	6	0	300
F_3	7	6	5	0	500
Nec.	250	320	360	70	1000

cu x_{ij}, $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$, cantitatea produsă de fabrica F_i din produsul P_j, modelul matematic al problemei are forma următoare:

$$[\max]\, f(X) = 8x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 6x_{21} + 5x_{22} + 6x_{23} + 7x_{31} + 6x_{32} + 5x_{23},$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 200, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 300, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 500, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 250, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 320, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 360, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 70, \end{cases}$$

$$x_{ij} \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3, 4.$$

Observăm că acest model seamănă mult cu cel al unei probleme de distribuire, singura deosebire fiind faptul că funcția de eficiență nu trebuie să-și atingă valoarea maximă, ci una minimă. De aceea, pentru rezolvare, vom adapta algoritmul potențialelor, în sensul următor:

Scanned with OKEN Scanner

— verificarea optimalității unei soluții realizabile de bază nedegenerate cere, ca toate diferențele Δ_{ij}; $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$, să fie nepozitive,

— pentru îmbunătățirea unei soluții realizabile de bază nedegenerate, se folosește o căsuță căreia îi corespunde o diferență pozitivă (de preferat cea mai mare).

Pentru aplicarea algoritmului, pornim de la o soluție realizabilă de bază, obținută prin metoda elementului maxim al matricei (datorită naturii extremului cerut). O astfel de soluție este conținută de tabelul II.3.80 și ea a fost obținută astfel:

Tabelul II.3.80

X_0:

200			
		300	
50	320	60	70

— în căsuța (F_1, P_1), cu „costul" cel mai mare (egal cu 8), s-a scris valoarea min. $\{200; 250\} = 200$,

— în căsuța (F_3, P_1), cu „costul" următor (egal cu 7), s-a scris valoarea min $\{500, 50\} = 50$,

— deoarece în căsuța (F_1, P_3) nu mai poate fi scris nimic, completăm căsuța (F_2, P_3), cu „costul" următor (egal cu 6), prin valoarea min $\{300; 320\} = 300$.

— deoarece a rămas o singură cantitate disponibilă, de 450 unități, la fabrica F_3, ea se repartizează automat pe linia respectivă, punînd $x_{31} = 320$, $x_{32} = 60$, $x_{33} = 70$.

Testarea soluției X_0 este realizată în tabelul II.3.81, în care sînt calculele costurile fictive și diferențele corespunzătoare ei. Deoarece există o diferență strict pozitivă, $\Delta_{13} = 1$,

Tabelul II.3.81

u_j \ v_i	7	6	5	0	$C - \tilde{C}$			
1	8*	7	6	1	0*	—2	1	—1
1	8	7	6*	1	—2	—2	0*	—1
0	7*	6*	5*	0*	0*	0*	0*	0*

soluția X_0 nu este optimă. Pentru îmbunătățire, punem θ în căsuța (F_1, P_3), din soluția X_0 și transportăm θ unități de-a lungul ciclului corespunzător acestei căsuțe, ca în tabelul II.3.82.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul II.3.82

X_0 :

200 − θ		θ	
		300	
50 + θ	320	60 − θ	70

Vom înlocui deci: $\theta = \min\{200; 60\} = 60$. Sîntem conduși astfel la soluția realizabilă de bază X_1, ce se află în tabelul II.3.83. În același tabel este forțată această soluție, ea dovedindu-se a fi optimă. În plus, datorită faptului că în tabelul II.3.83 există o diferență nulă fără steluță, $\Delta_{24} = 0$, putem

Tabelul II.3.83

X_1				u_i \ v_j	7	6	6	0	$C - \bar{C}$			
140 − θ		60 + θ		1	8*	7	7*	1	0*	−2	0*	−1
		300 − θ	θ	0	7	6	6*	0	−1	−1	0*	0
110 + θ	320		70 − θ	0	7*	6*	6	0*	0	0*	−1	0*

preciza că mai există o soluție optimă de bază. Ea se obține folosind ciclul reprezentat pe soluția X_1 și are forma dată în tabelul II.3.84.

Tabelul II.3.84

X_i :

70		130	
		230	70
180	320		

Testarea acestei soluții conduce, de asemenea, la verificarea criteriului de optim. Mai mult, se obține aceeași matrice a diferențelor ca în tabelul II.3.83, ceea ce propunem cititorului să verifice prin calcul.

Scanned with OKEN Scanner

Conform celor arătate în paragraful de față, problema rezolvată mai sus are o infinitate de soluții optime, soluția optimă generală fiind o combinație liniară convexă a soluțiilor optime de bază X_1 și X_2. Notînd cu $\bar{X}$ soluția optimă generală, vom avea deci:

$$\bar{X} = \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2, \text{ cu } \lambda \in [0, 1].$$

În tabelul II.3.85 este reprezentată pe componente soluția optimă generală, calculată cu formula de mai sus. Calculul separat, pentru soluțiile optime X_1 și X_2, sau calculul aplicat direct asupra soluției optime generale, conduc la: $f_{max}(X) = f(X_1) = f(X_2) = f(\bar{X}) = 6\,030$. Alegerea unui plan de producție optim, conform soluției optime generale $\bar{X}$, se poate face la întîmplare, sau prin folosirea unui alt criteriu, decît cel luat în considerație mai sus.

Tabelul II.3.85

$\bar{X}$:	$140\lambda + 70(1-\lambda) = 70 + 70\lambda$		$60\lambda + 130(1-\lambda) = 130 + 70\lambda$		
			$300\lambda + 230(1-\lambda) = 230 + 70\lambda$	$70(1-\lambda)$	$\lambda \in [0, 1]$
	$110\lambda + 180(1-\lambda) = 180 - 70$	320		70λ	

Probleme rezolvate

1. Trei magazine, B_1, B_2 și B_3, se aprovizionează cu un anumit produs de la trei depozite, A_1, A_2 și A_3. În tabelul II.3.86 sînt precizate cantitățile disponibile la cele trei depozite, cantitățile necesare la cele trei magazine, precum și costurile unitare de transport (eventual distanțele) de la fiecare depozit la fiecare magazin.

Tabelul II.3.86

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	5	3	6	300
A_2	3	2	6	200
A_3	2	3	4	200
b_j	280	170	100	700 / 550

Scanned with OKEN Scanner

a) Știind că fiecare magazin se poate aproviziona parțial sau total de la fiecare depozit, să se determine un plan optim de aprovizionare, după criteriul cheltuieli totale de transport minime, asigurînd integral cantitățile necesare la cele trei magazine.

b) Să se calculeze toate planurile optime de transport în condițiile de la punctul precedent.

c) Există un plan optim de transport, în care magazinul B_1 se aprovizionează cu cantități egale de la două depozite?

Rezolvare. a) În tabelul cu datele problemei, s-au calculat și totalurile disponibil și necesar, care nu sînt egale. Echilibrăm problema, introducînd magazinul fictiv B_4, care absoarbe diferența de 150 unități, ca în tabelul II.3.87. Cantitățile ce vor „merge" la B_4 sînt în realitate cantități ce rămîn în

Tabelul II.3.87

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	3	6	$0^{(1)}$	300
A_2	$3^{(4)}$	$2^{(3)}$	6	0	200
A_3	$2^{(2)}$	3	4	0	200
b_j	280	170	100	150	700

cele trei depozite, costurile unitare de transport corespunzătoare fiind nule. Pentru determinarea unei soluții realizabile de bază inițiale, folosim metoda elementului minim al matricei, luînd succesiv:

$x_{14} = \min\{150, 300\} = 150$, corespunzător costului $c_{14} = 0$,
$x_{31} = \min\{280, 200\} = 200$, corespunzător costului $c_{31} = 2$,
$x_{22} = \min\{170, 200\} = 170$, corespunzător costului $c_{22} = 2$,
$x_{21} = \min\{80, 30\} = 30$, corespunzător costului $c_{21} = 3$,
$x_{11} = 50$ și $x_{13} = 100$, rămase nerepartizate din A_1.

În matricea costurilor este marcată această ordine, prin indici puși în paranteze, în cadrul tabelului II.3.87. Soluția inițială este cea din tabelul II.3.88, lîngă ea fiind completate alte două tabele ce o testează. Deoarece avem $\Delta_{12} = -1 < 0$ (încercuită în matricea $C - \bar{C}$), s-a construit ciclul corespunzător acestei căsuțe (chiar pe matricea X_0), deplasîndu-se

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul II.3.88

X_0				u_i \ v_j	5	4	6	0	$C - \bar{C}$			
50—θ	θ	100	150	0	5*	4	6*	0	0*	—1	0*	0*
30+θ	170—θ			—2	3*	2*	4	—2	0*	0*	2	2
200				—3	2*	1	3	—3	0*	2	1	3

θ unități de-a lungul acestui ciclu. Punînd $\theta = \min\{50, 170\} = 50$, obținem soluția de bază X_1, ce a fost testată în mod asemănător în tabelul II.3.89.

Tabelul II.3.89

X_1				u_i \ v_j	4	3	6	0	$C - \bar{C}$			
	50+θ	100—θ	150	0	4	3*	6*	0*	1	0*	0*	0*
80+θ	120—θ			—1	3*	2*	5	—1	0*	0*	1	1
200—θ		θ		—2	2*	1	4	—2	0*	2	0	2

Toate diferențele sînt, de această dată, nenegative, ceea ce înseamnă că soluția X_1 este optimă. Interpretăm planul de transport corespunzător, din punctul de vedere al depozitelor, astfel:

— depozitul A_1 trimite 50 unități de produs la B_2 și 100 unități la B_3, păstrînd celelalte 150 unități,

— depozitul A_2 trimite 80 unități la B_1 și 120 unități la B_2,

— depozitul A_3 trimite toate cele 200 unități la B_1. Din punctul de vedere al magazinelor, aceeași soluție se interpretează astfel:

— magazinul B_1 primește 80 unități de la A_2 și 200 unități de la A_3,

— magazinul B_2 primește 50 unități de la A_1 și 120 unități de la A_2,

— magazinul B_3 primește toate cele 100 unități de la A_1.

Scanned with OKEN Scanner

b) În cadrul testării soluției optime X_1, a apărut diferența $\Delta_{33} = 0$ fără steluță (încercuită în matricea $C - \bar{C}$). Rezultă că problema mai are o soluție optimă de bază, ce se obține folosind ciclul corespunzător căsuței (A_3, B_3). Deplasarea celor θ unități de produs de-a lungul ciclului menționat, a fost făcută chiar pe matricea X_1 din tabelul II.3.89. Punem $\theta = \min\{100, 120, 200\} = 100$ și obținem soluția optimă de bază X_2, ce a fost testată în tabelul II.2.52.

Tabelul II.3.90

X_2				v_j / u_i	4	3	0	6	$C - \bar{C}$			
	150		150	0	4	3*	6	0*	1	0*	0	0*
180	20			−1	3*	2*	5	−1	0*	0*	1	1
100		100		−2	2*	1	4*	−2	0*	2	0*	2

Se observă că folosirea, în același fel, a diferenței $\Delta_{13} = 0$, ne-ar conduce la soluția X_1, ceea ce înseamnă că X_1 și X_2 sînt singurele soluții optime de bază. De altfel, dacă am fi observat de la început că în afară de X_1 și X_2 nu se mai poate obține altă soluție optimă de bază, nu am mai fi efectuat testarea lui X_2, ea fiind de prisos. Soluția optimă generală este deci $\bar{X} = \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2$, cu $\lambda \in [0, 1]$. Pe componente, efectuarea acestor calcule conduce la valorile din tabelul II.3.91.

Tabelul II.3.91

$\bar{X}$:				
	$150 - 100\lambda$	100λ	150
$180 - 100\lambda$	$20 + 100\lambda$		
$100 + 100\lambda$		$100 - 100\lambda$	

cu $\lambda \in [0, 1]$.

c) Într-un plan optim de transport oarecare, magazinul B_1 se aprovizionează numai de la depozitele A_2 și A_3, cu cantitățile:

$$\bar{x}_{21} = 180 - 100\lambda; \quad \bar{x}_{31} = 100 + 100\lambda$$

Pentru existența planului optim cerut de problemă, trebuie să avem:

$$180 - 100\lambda = 100 + 100\lambda, \text{ de unde } \lambda = 2/5.$$

Deoarece valoarea lui λ, ce s-a obținut, este într-adevăr cuprinsă în intervalul [0, 1], rezultă că există o soluție

Scanned with OKEN Scanner

optimă ce răspunde condiției problemei. Ea se obține înlocuind în $\bar{X}$, pe λ prin 2/5, ca în tabelul II.3.92. Se observă ușor că această soluție nu este o soluție de bază.

Tabelul II.3.92

		110	40	150
X_1:	140	60		
	140		60	

2. Trei întreprinderi, A_1, A_2 și A_3, pot fabrica oricare din produsele B_1, B_2, B_3 și B_4, dar cu cheltuieli unitare de producție diferite, datorită specializării și condițiilor diferite de producere. În tabelul II.3.93 se dau cheltuielile pentru fabricarea unei unități de produs de fiecare tip, de către oricare dintre cele trei întreprinderi, capacitățile totale de producție ale celor trei întreprinderi, în raport cu produsele menționate (notate cu a_i, $i = 1, 2, 3$), precum și cantitățile totale necesare din fiecare tip de produs (notate cu b_j, $j = 1, 2, 3, 4$).

Tabelul II.3.93

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	2	3	4	50
A_2	5	4	5	3	100
A_3	4	4	6	7	150
b_j	150	100	150	100	500 / 300

Dacă fiecare întreprindere poate fabrica oricare combinație din produsele arătate, să se determine un plan comun de producție a acestora, astfel încît să fie asigurate în cea mai mare măsură cantitățile necesare din cele patru tipuri de produse, cu cheltuieli totale de producție cît mai mici, pe întreg ansamblul celor trei întreprinderi.

Rezolvare. Deși problema este de producție, observăm că poate fi făcută o analogie cu o problemă de transport, considerînd cele trei întreprinderi ca pe niște centre producătoare (capacitățile de producție fiind cantitățile disponibile), iar cele patru produse ca pe niște centre consumatoare. Această analogie poate fi justificată prin scrierea modelului matematic al problemei, care coincide cu cel al unei probleme de transport. De aceea, spunem că problema dată este o

Scanned with OKEN Scanner

problemă de tip transport și o rezolvăm cu algoritmul corespunzător.

Deoarece totalul disponibil este mai mic decît totalul necesar, introducem un centru fictiv de producție, întreprinderea fictivă A_4, cu o capacitate de 200 unități. Evident, cantitățile de produs „fabricate" de A_4 sînt în realitate cantități pe care cele trei întreprinderi existente nu le pot asigura, datorită capacității totale reduse în raport cu cerințele. Problema echilibrată are datele din tabelul II.3.94.

Tabelul II.3.94

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	2	3	4	50
A_2	5	4	5	3	100
A_3	4	4	6	7	150
A_4	0	0	0	0	200
b_j	150	100	150	100	500

Există multe grupe de cantități disponibile, a căror sumă este egală cu suma unor cantități necesare, de exemplu: $a_2 = b_2$; $a_1 + a_2 = b_1$; $a_1 + a_3 + a_4 = b_1 + b_2 + b_3$ etc.

De aceea, pentru a evita de la început obținerea unei soluții realizabile de bază inițiale degenerate, aplicăm metoda perturbării, ca în tabelul II.3.95, ceea ce duce la soluția

Tabelul II.3.95

$X_0(\varepsilon)$				
	$50-\varepsilon$	2ε		$50+\varepsilon$
			$100+\varepsilon$	$100+\varepsilon$
		$150-2\varepsilon$	3ε	$150+\varepsilon$
150	$50+\varepsilon$			$200+\varepsilon$
150	100	150	$100+4\varepsilon$	

X_0			
	$50+\theta$	$0-\theta$	
			100
		$150+\theta$	$0-\theta$
150	$50-\theta$		θ

inițială X_0. Testarea soluției X_0 este realizată în tabelul II.3.96, de unde se deduce că ea nu verifică criteriul de optim. Pe soluția X_0, din tabelul II.3.95 s-a efectuat deplasarea unei cantități θ, de-a lungul ciclului corespunzător căsuței (A_4, B_4). Găsim: $\theta = \min\{50, 0, 0\} = 0$,

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul II.3.96

u_i \ v_j	2	2	3	4	$C-\bar{C}$			
0	2	2*	3*	4	3*	0*	0*	0
—1	1	1	2	3*	4	3	3	0*
3	5	5	6*	7*	1	1	0*	0*
—2	0*	0*	1	2	0	0*	—1	|—2|

ceea ce înseamnă că unul din cele două zerouri esențiale se va muta în căsuța (A_4, B_4): vom renunța la zeroul esențial din căsuța (A_3, B_4), acestei căsuțe corespunzîndu-i un cost unitar mai mare decît căsuței (A_1, B_3). Obținem astfel soluția X_1 din tabelul II.3.97, care coincide practic cu soluția X_0, dar care corespunde altei baze. Această soluție este testată în același tabel II.3.97.

Tabelul II.3.97

X_1			
	50+θ	0—θ	
			100
		150	
150	50—θ	θ	0

u_i \ v_j	2	2	3	2	$C-\bar{C}$			
0	2	2*	3*	2	3	0*	0*	2
1	3	3	4	3*	2	1	1	0*
3	5	5	6*	5	1	1	0*	2
—2	0*	0*	1	0*	0*	0*	|—1|	0*

Nici X_1 nu se dovedește a verifica criteriul de optim. Deplasînd θ unități, de-a lungul ciclului corespunzător căsuței (A_4B_3) cu $\theta = 0$, obținem soluția X_2, ce este testată în tabelul II.3.98.

Tabelul II.3.98

X_2			
	50		
			100
θ		150—θ	
150—θ	50	θ+0	

u_i \ v_j	2	2	2	2	$C-\bar{C}$			
0	2	2*	2	2	3	0*	1	2
1	3	3	3	3*	2	1	2	0*
4	6	6	6*	6	|—2|	0*	0*	1
—2	0*	0*	0*	0*	0*	0*	0*	0*

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece nici X_2 nu verifică criteriul de optim, s-au transportat $\theta = \min\{150, 150\} = 150$ unități, de-a lungul ciclului corespunzător căsuței (A_3, B_1). De data aceasta, două componente, x_{33} și x_{41}, devin nule: nu vom elibera ambele căsuțe, ci numai căsuța (A_3, B_3), ei corespunzîndu-i un cost unitar de transport mai mare. Obținem astfel soluția X_4, care se dovedește a fi optimă, în tabelul II.3.99.

Tabelul II.3.99

X_4				u_i \ v_j	2	2	2	2	$C-\bar{C}$			
	50			0	2	2*	2	2	3	0*	1	2
			100	1	3	3	3	3*	2	1	2	0*
150−θ	θ			2	4*	4	4	4	0*	0	2	3
0+θ	50−θ	150	0	−2	0*	0*	0*	0*	0*	0*	0*	0*

Să observăm că în testarea soluției X_4, a apărut diferența $\Delta_{32} = 0$, care corespunde unui vector din afara bazei. Aceasta înseamnă că mai există o soluție optimă de bază, anume cea din tabelul II.3.100.

Tabelul II.3.100

X_5:

	50		
			100
100	50		
50		150	0

Cititorul poate construi acum, cu ușurință, soluția optimă generală, de forma:

$$X = \lambda X_4 + (1 = \lambda)X_5, \text{ cu } \lambda \in [0, 1].$$

De asemenea, lăsăm pe seama cititorului, interpretarea oricăreia dintre soluțiile optime, variabilele de decizie fiind:

x_{ij} = cantitatea fabricată de întreprinderea A_i, din produsul B_j, $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$.

x_{4j} = cantitatea din produsul B_j, ce nu poate fi asigurată de cele trei întreprinderi, deci care va trebui procurată prin diferite soluții practice în afara problemei, ca: mărirea capacităților de producție, import etc.

Scanned with OKEN Scanner

3. Un anumit produs trebuie transportat din centrele producătoare A_1, A_2 și A_3, în centrele consumatoare B_1, B_2 și B_3. Costurile unitare de transport, dintre centrele producătoare și centrele consumatoare, cantitățile disponibile în centrele producătoare, precum și cantitățile necesare în centrele consumatoare, sînt date în tabelul II.3.101.

Tabelul II.3.101

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	6	5	4	300
A_2	6	6	7	600
A_3	5	3	4	600
b_j	800	900	500	—

Să se determine un plan de transport, care să asigure cît mai mult din totalul necesar în centrele consumatoare, dar cu cheltuieli totale de transport minime.

Răspuns. Centrul A_1 trimite toate cele 300 unități la B_3; centrul A_2 trimite 300 unități la B_1 și 300 unități la B_2; centrul A_3 trimite toate cele 600 unități la B_2. Rămîn nesatisfăcute; B_1 cu 500 unități și B_3 cu 200 unități Cheltuieli totale de transport: 660 u.b.

4. Un produs se găsește în depozitele A_1, A_2 și A_3, în cantități egale respectiv cu 200, 300 și 500 unități. Produsul este cerut de magazinele B_1, B_2, B_3, care au nevoie respectiv de 150, 170 și 320 unități. Cheltuielile unitare de transport, între depozite și magazine, sînt date în tabelul II.3.102.

Tabelul II.3.102

	B_1	B_2	B_3
A_1	3	4	5
A_2	2	3	5
A_3	5	4	2

a) Să se determine un plan de transport, care să asigure complet necesarul la magazine, dar cu cheltuieli totale de transport minime.

b) Să se determine toate soluțiile optime ale problemei.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se arate că există o soluție optimă, în care centrul A_1 trimite numai 10 unități la B_2, restul de 190 unități rămînînd netransportate.

Răspuns. b) $x_{12} = 170(1 - \lambda)$; $x_{14} = 170\lambda + 30$; $x_{21} = 150$; $x_{24} = 150$; $x_{32} = 170\lambda$; $x_{33} = 320$; $x_{34} = 180 - 170\lambda$; $\lambda \in [0, 1]$.

c) Trebuie să avem: $x_{12} = 170(1 - \lambda) = 10$ și $x_{14} = 170\lambda + 30 = 190$, de unde $\lambda = 16/17 \in [0, 1]$.

5. Pentru transportul unui produs din centrele A_1, A_2, A_3, în centrele B_1, B_2, B_3, se cunosc datele din tabelul II.3.103.

Tabelul II.3.103

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	5	5	3	100
A_2	4	5	2	100
A_3	5	6	7	200
b_j	200	200	200	—

Să se găsească un plan de transport optim, așa încît cu cheltuieli totale de transport minime, să se asigure cît mai mult necesarul în centrele consumatoare.

Răspuns. Singura soluție optimă este o soluție de bază degenerată, care corespunde bazei $\{a_{14}, a_{24}, a_{31}, a_{41}, a_{42}, a_{43}\}$. Componentele nenule sînt: $x_{14} = 100$; $x_{24} = 100$; $x_{31} = 200$; $x_{42} = 200$.

6. Trei întreprinderi, A_1, A_2, A_3, pot fabrica un anumit produs, cu cheltuieli unitare de producție diferite, egale respectiv cu 7 u.b., 5 u.b., 4 u.b., ele avînd capacități maxime de producție, în ceea ce privește produsul considerat, de 400; 100 și 300 unități respectiv. Produsul este cerut de centrele consumatoare B_1, B_2 și B_3, ce au nevoie respectiv de 300, 100 și 200 unități. Costurile unitare de transport, de la fiecare întreprindere, la fiecare centru consumator, sînt date în tabelul II.3.104.

Tabelul II.3.104

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3
A_1	1	1	2
A_2	7	1	4
A_3	1	3	6

Scanned with OKEN Scanner

Să se determine un plan comun, de producție și transport al produsului dat, astfel încît să se asigure cantitățile necesare în cele trei centre consumatoare, iar cheltuielile totale de producție și transport, să fie minime.

Indicație și răspuns. Se notează cu x_{ij} cantitatea de produs fabricată de întreprinderea A_i, ce pleacă spre centrul consumator B_j. La costurile unitare de transport, date de problemă, se adaugă cheltuielile unitare de producție, respectiv pe prima linie cîte 7 unități, pe a doua linie cîte 5 unități și pe a treia linie cîte 4 unități. Capacitățile de producție se vor lua drept cantități disponibile. Se aplică apoi algoritmul potențialelor la problema obținută. Se obțin două soluții optime de bază, în care coincid componentele nenule. Astfel, singurul plan de transport optim cere ca: întreprinderea A_1 să fabrice 200 unități și să le trimită la B_3, întreprinderea A_2 să fabrice 100 unități și să le trimită la B_2, iar întreprinderea A_3 să fabrice 300 unități și să le trimită la B_1. Întreprinderea A_1 își va folosi capacitatea de producție la jumătate.

7. Două fabrici, F_1 și F_2, pot produce un anumit produs, care este necesar în trei centre de consum, C_1, C_2 și C_3. Tabelul II.3.105, conține conturile unitare de transport de la fiecare fabrică la fiecare centru de consum, precum și cantitățile necesare în cele trei centre de consum.

Tabelul II.3.105

F_i \ C	C_1	C_2	C_3
F_1	4	3	2
F_2	3	4	4
Nec.	40	50	50

După cum se știe, în general, cheltuielile de producție sînt proporționale cu cantitatea produsă, coeficientul de proporționalitate fiind dat de cheltuielile făcute pentru fabricarea unei unități din produsul respectiv. Să presupunem că, în condiții normale, costurile unitare de producție, în cele două fabrici, sînt respectiv de 4 u.b. și 3 u.b., putîndu-se fabrica, în aceste condiții, cantități cel mult egale cu 70

Scanned with OKEN Scanner

unități pentru fabrica F_1, respectiv 50 unități pentru fabrica F_2. Cele două fabrici își pot suplimenta, la nevoie, planurile de producție peste cantitățile specificate, făcînd eforturi suplimentare, eforturi care se concretizează în mărirea costurilor unitare de producție cu cîte două unități bănești. În acest fel, se poate ajunge la folosirea capacităților maxime de producție ale celor două fabrici, egale respectiv cu 100 unități pentru F_1 și 80 unități pentru F_2.

În aceste condiții, să se determine un plan comun, de producție și de transport, pentru sistemul format din cele două fabrici și cele trei centre consumatoare, astfel încît toată cantitatea produsă să fie expediată în centrele consumatoare, iar cheltuielile totale, de producție și de transport, să fie cît mai mici. Se va fabrica cît mai mult posibil.

Indicație și răspuns. Vom considera fiecare fabrică în parte ca fiind constituită din două centre producătoare, unul producînd cu costul unitar de fabricație mai mic și avînd capacitatea egală cu cantitatea maximă de produs ce se poate fabrica la acest cost, iar celălalt producînd cu costul unitar de fabricație mai mare și avînd capacitatea egală cu cantitatea suplimentară de produs, ce se poate fabrica cu acest cost mărit.

Cu cele patru centre producătoare, determinate în modul indicat mai sus, precum și cu cele trei centre de consum date de problemă, se poate forma o problemă de transport, în care avem următoarele date:

— cantitățile necesare sînt cele date de problema inițială;

— cantitățile disponibile sînt capacitățile corespunzătoare de producție, definite ca mai sus;

— costurile unitare de „transport" sînt determinate de cheltuielile totale cu o unitate de produs, pentru a fi fabricată în centrul producător respectiv și transportată la centrul consumator corespunzător.

Notînd cu F_1' și F_1'' centrele producătoare definite pe baza fabricii F_1, în situația în care ea produce cu cheltuieli unitare de producție mici, respectiv mai mari, iar cu F_2' și F_2'' centrele producătoare definite în mod asemănător pe baza fabricii F_2, datele problemei de transport ajutătoare sînt cele din tabelul II.3.106.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul II.3.106

F_i \ C_j	C_1	C_2	C_3	Disp.
F_1'	8	7	6	70
F_1''	10	9	8	30
F_2'	6	7	7	50
F_2''	8	9	9	30
Nec.	40	50	50	180 140

În acest tabel, linia F_1', de exemplu, corespunde fabricii F_1, ce produce cu cheltuieli unitare de producție egale cu 4 u.b., putînd fabrica în acest fel cel mult 70 de unități de produs. Costurile de pe linia F_1' a tabelului s-au calculat adunînd la cheltuielile unitare de transport corespunzătoare, de pe linia F_1 a tabelului cu costuri unitare de transport (tabelul II.3.105), cîte patru unități, adică, cheltuielile unitare de producție pentru F_1'. Adunînd la elementele aceleiași linii F_1 a tabelului II.3.105 cîte șase unități (cheltuielile unitare de producție pentru F_1'') s-a obținut linia F_1'' a tabelului II.3.106. În mod asemănător s-au calculat și elementele celorlalte linii ale tabelului II.3.106. Rezolvînd problema de transport obținută, se găsește următorul plan de producție și transport:

— fabrica F_1 va produce numai cele 70 de unități de produs cu cheltuieli normale de producție, din care va trimite 20 unități spre centrul C_2 și 50 unități spre centrul C_3,

— fabrica F_2 va produce, pe lîngă cele 50 de unități corespunzătoare cheltuielilor mici de producție, încă 20 unități cu cheltuieli de producție mai mari; dintre acestea, ea va trimite 40 unități spre centrul C_1 și 30 unități spre centrul C_2.

Conform acestui plan, rămîn nefolosite, dintre capacitățile suplimentare de producție, următoarele: 30 unități la fabrica F_1 și 10 unități la fabrica F_2 (ele se găsesc pe coloana centrului C_4, adăugat de noi). Cheltuielile totale, de producție și transport, vor fi cele mai mici posibile și anume:

$$f(X) = 930 \text{ u.b.}$$

Scanned with OKEN Scanner

8. O fabrică trebuie să producă un anumit tip de produs, pentru a asigura cererea din timpul unui an, repartizată pe cele patru trimestre, astfel:

— trimestrul I: 200 unități,
— trimestrul II: 300 unități,
— trimestrul II: 500 unități,
— trimestrul IV: 500 unități.

Capacitatea de producție a fabricii este, în condiții normale, de 300 unități pe fiecare trimestru, cheltuielile unitare de producție fiind în aceste condiții de șase unități bănești. Făcînd anumite eforturi, fabrica mai poate produce, în timpul oricărui trimestru, încă 100 unități, dar cu cheltuieli unitare de producție mărite, de nouă unități bănești.

Anumite cantități de produs pot fi fabricate în timpul unui trimestru și vîndute în timpul unuia din trimestrele următoare, dar în acest caz se plătesc cheltuieli de stocaj, egale cu o unitate bănească pe unitatea de produs și pe trimestru.

În aceste condiții se cere să se determine un plan de producție pe cele patru trimestre, care să asigure cererile respective și care să conducă la cheltuieli totale de producție și stocaj minime.

Indicație și răspuns. Vom construi o problemă ajutătoare de „transport", în care considerăm următoarele opt centre producătoare:

— $F_i'(i = 1, 2, 3, 4)$, fabrica în situația că produce în timpul trimestrului de ordin i și cu cheltuieli unitare de producție de 6 u.b., capacitatea fiind egală cu 300 unități;

— $F_i''(i = 1, 2, 3, 4)$ fabrica în situația că produce în timpul trimestrului de ordin i, dar cu cheltuieli unitare de producție de 9 u.b., capacitatea fiind egală cu 100 unități.

Cele patru trimestre le vom considera ca patru centre de consum, ele avînd nevoie de 200; 300; 500 și 500 unități. În sfîrșit, costurile unitare de transport, pentru această problemă ajutătoare, sînt date de cheltuielile cumulate de producție și de stocaj, la unitatea de produs, pentru fiecare situație în parte. Tabelul II.3.107 conține datele problemei ajutătoare de transport, costurile de transport egale cu infinit reprezentînd imposibilitatea folosirii respectivelor situații.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul II.3.107

F_i Trim.	I	II	III	IV	Disp.
F_1'	6	7	8	9	300
F_1''	9	10	11	1	100
F_2'	∞	6	7	8	300
F_2''	∞	9	10	11	100
F_3'	∞	∞	6	7	300
F_3''	∞	∞	9	10	100
F_4'	∞	∞	∞	6	300
F_4''	∞	∞	∞	7	100
Nec.	200	300	500	500	1600 1500

Pentru exemplificarea modului în care s-au calculat costurile unitare de transport ale problemei ajutătoare, indicăm felul în care s-au determinat două costuri de acest fel. Astfel, costul de pe linia F_1' și coloana III reprezintă cheltuielile totale efectuate pentru producerea unei unități de produs în trimestrul I, cu cheltuieli de producție de 6 u.b., unitate care este vîndută în trimestrul III, deci pentru care se plătesc cheltuieli de stocaj pentru două trimestre. De asemenea, costul de pe linia F_2'' și de pe coloana IV reprezintă cheltuielile totale, efectuate pentru producerea unei unități în trimestrul II, cu cheltuieli de producție de 9 u.b., unitate care este vîndută în trimestrul IV, deci pentru care se plătesc cheltuieli de stocaj timp de două trimestre. Prin rezolvarea problemei de transport obținute, se găsește următorul plan optim:

— în trimestrul I trebuie să se producă 300 unități de produs, din care 200 vor fi vîndute chiar în acest trimestru, iar 100 în trimestrul II;

— în trimestrul II trebuie să se producă unități, din care 200 vor fi vîndute în acest trimestru, iar 200 în trimestrul III,

— în trimestrul III trebuie să se producă 400 de unități, din care 300 vor fi vîndute în același trimestru, iar 100 în trimestrul IV;

— în trimestrul IV trebuie să se producă 400 unități, acestea vînzîndu-se evident în trimestrul respectiv.

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd acest plan de producție, se vor efectua cheltuieli minime, de 10 300 u.b.

9. Patru muncitori, notați cu x_1, x_2, x_3 și x_4, trebuie să fie repartizați să lucreze pe unele dintre cele cinci mașini ale unei secții, mașini notate cu v_1, v_2, v_3, v_4 și v_5, astfel încît să nu lucreze mai mulți muncitori pe aceeași mașină și nici un muncitor pe mai multe mașini.

Tabelul II.3.108 conține numărul de rebuturi rezultate în medie prin lucrul fiecărui muncitor la fiecare mașină, la mia de piese lucrate.

Tabelul II.3.108

x_i \ y_j	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	3	2	1	3	2
x_2	4	2	2	3	2
x_3	3	1	3	4	1
x_4	3	3	3	3	1

Să se determine o repartiție a celor patru muncitori, astfel încît procentajul mediu de rebuturi, pe întreaga secție, să fie minim, rezolvînd problema dată ca o problemă de tip transport.

Indicație și răspuns. Atașăm problemei date o problemă de „transport", construită astfel:

— considerăm cei patru muncitori ca niște centre producătoare, cu cantitățile disponibile egale toate cu cîte o unitate;

— considerăm cele cinci mașini ca niște centre consumatoare, cu cantitățile necesare egale toate cu cîte o unitate;

— cheltuielile unitare de „transport" sînt cele din tabelul II.3.108.

O soluție de bază optimă a acestui model va indica o repartizare optimă a celor patru muncitori în cadrul secției. Toate soluțiile de bază ale modelului sînt degenerate, componentele diferite de zero fiind egale cu unu.

Prin rezolvarea modelului de tip transport, obținem soluția optimă:

— muncitorul x_1 va lucra la mașina y_3,
— muncitorul x_2 va lucra la mașina y_4,
— muncitorul x_3 va lucra la mașina y_2,
— muncitorul x_4 va lucra la mașina y_5,
— muncitorul x_5 va lucra la mașina y_1 (mașina neocupată).

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul III

ELEMENTE DE TEORIA GRAFURILOR

III.1. Noțiuni generale despre grafuri

Fie X o mulțime finită și nevidă de elemente (de orice natură ar fi ele), elemente pe care le numim *vîrfuri*, *noduri* sau mai simplu *puncte*. Obișnuim să notăm elementele lui X prin $x_1, x_2, \ldots, x_n$; uneori, dacă nu există pericol de confuzie, pentru simplitate, le vom reprezenta numai prin indicii respectivi, aceste elemente fiind notate deci cu $1, 2, \ldots, n$. Un vîrf oarecare din X îl vom nota prin x_i sau prin x_j, sau prin x_k etc., respectiv cu i, j, k etc.

Pe de altă parte, să considerăm o mulțime γ de perechi ordonate (în care are importanță ordinea) de vîrfuri din X, perechi pe care le vom nota sub forma (x_i, x_j) sau mai scurt (i, j). Desigur, pentru că arcele sînt perechi ordonate, arcul (x_i, x_j) este diferit de arcul (x_j, x_i). Accentuăm, de asemenea, că nu este obligatoriu ca mulțimea γ să conțină toate perechile ordonate posibile, de elemente din X. Vom numi mulțimea γ *mulțimea arcelor* sau a *liniilor*. Desigur, pentru că arcele sînt perechi.

Cuplul format din mulțimile X și γ se numește *graf orientat* și se notează prin $G = (X, \gamma)$.

Observații. 1. Mulțimea X, a vîrfurilor grafului, poate fi și infinită, dar numărabilă, caz în care graful este numit *graf infinit*. De asemenea, pot fi luate în considerare grafuri la care între două vîrfuri pot exista mai multe arce cu același sens (așa-numitele *multigrafuri*). Nu vom folosi astfel de grafuri în lucrarea de față.

2. Un arc de forma (x_i, x_i) cu $x_i \in X$, se numește *buclă*. În lucrarea de față, nu vom lucra cu grafuri ce conțin bucle.

Exemplu. Fie $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ mulțimea operațiilor de prelucrare, ce trebuie aplicate pentru fabricarea unei piese P, aceste operații reprezentînd vîrfurile unui graf

Scanned with OKEN Scanner

orientat G. Vom considera că graful G conține arcul (x_i, x_j), cu $x_i, x_j \in X$, dacă operația notată cu x_j nu poate fi efectuată dacă nu s-a efectuat anterior (indiferent cînd) operația x_i. Conform acestei convenții, să presupunem că mulțimea arcelor grafului G este următoarea:

$$X = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_1, x_5), (x_2, x_4), (x_2, x_5),$$
$$(x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_4, x_5)\}$$

Fiind cunoscute mulțimile X și γ, graful $G = (X, \gamma)$, care exprimă matematic fenomenul de realizare a piesei P, este perfect determinat.

Deosebit de utilă este adesea *reprezentarea geometrică* a unui graf orientat, care se obține în modul următor:

— se reprezintă vîrfurile grafului ca puncte în plan (așezate oricum),

— fiecare arc $(x_i, x_j) \in \gamma$ se reprezintă printr-o linie ce unește punctul corespunzător vîrfului x_i cu punctul corespunzător vîrfului x_j, linie pe care se găsește o săgeată, cu sensul de la x_i către x_j.

Dăm, ca exemplu, reprezentarea geometrică a grafului $G = (X, \gamma)$, definit în exemplul precedent, aceasta avînd forma din figura III.1.1.

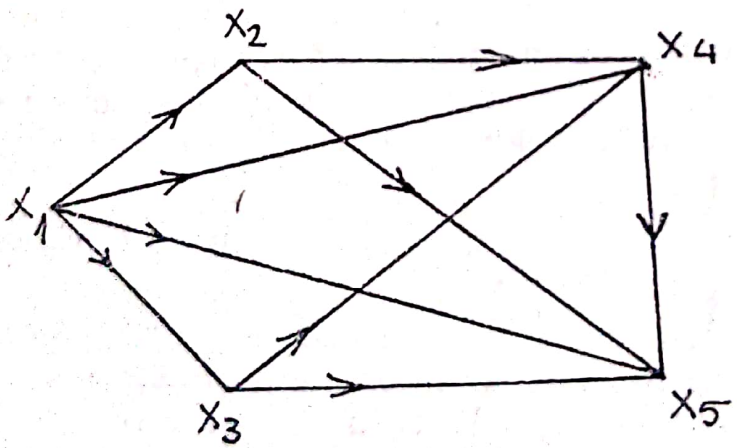


Fig. III.1.1

În unele aplicații practice, la folosirea conceptului de graf nu este necesară orientarea liniilor grafului. În astfel de situații, în locul mulțimii γ de arce, se consideră o mulțime analoagă, notată cu $\bar{\gamma}$ și numită *mulțimea muchiilor*. O *muchie*, ce unește vîrfurile x_i și x_j, este perechea neordonată a acestor vîrfuri (nu contează ordinea lor); ea se reprezintă simbolic prin $[x_i, x_j]$ și este evident identică cu $[x_j, x_i]$. Putem astfel să vorbim despre graful neorientat $G = (X, \bar{\gamma})$.

Scanned with OKEN Scanner

Observații. 1. Un graf neorientat $G = (X, \bar{\gamma})$ poate fi înlocuit în aplicații printr-unul orientat, cu aceeași mulțime de vîrfuri, dar corespunzător fiecărei muchii $[x_i, x_j] \in \bar{\gamma}$, introducîndu-se în noul graf două arce de sens contrar, (x_i, x_j) și (x_j, x_i). Pot fi folosite, de asemenea, și *grafuri mixte*, care conțin atît arce, cît și muchii.

2. Reprezentarea geometrică a unui graf neorientat se face asemănător cu aceea a unui graf orientat, cu deosebirea că nu mai punem săgeți pe linii.

Exemplu. Să interpretăm punctele importante ale unei rețele de curent alternativ ca vîrfuri, iar liniile electrice care le unesc, ca niște muchii (evident, nu contează sensul acestora). Se definește astfel un graf neorientat, ce poate reprezenta matematic rețeaua electrică respectivă.

Considerînd un arc (x_i, x_j), al unui graf orientat, spunem că x_i este *extremitatea inițială*, iar x_j, *extremitatea finală* a arcului. Evident, în cazul unei muchii, distincția dintre cele două extremități nu se mai face.

Două vîrfuri ale unui graf, G, se numesc *vîrfuri adiacente*, dacă ele sînt unite în graf prin cel puțin un arc (o muchie). Spunem, de asemenea, că un arc (muchie) este *incident* unui vîrf, dacă vîrful respectiv reprezintă una din extremitățile arcului (muchiei). Mai precis, în cazul grafului orientat, dacă este *incident exterior* vîrfului, iar dacă vîrful este extremitatea finală a arcului, spunem că arcul este *incident interior* vîrfului. Ca exemplu, să luăm arcul (x_2, x_5) din figura III.1.1: el este incident exterior vîrfului x_2 și incident interior vîrfului x_5.

Numărul de arce incidente exterior unui vîrf $x_i \in X$, poartă numele de *grad exterior de incidență*, corespunzător vîrfului x_i și se notează cu $g^+(x_i)$, sau, mai simplu, cu g_i^+. Analog, numărul de arce incidente interior vîrfului x_i este *gradul interior de incidență* al vîrfului x_i și se notează cu $g^-(x_i)$ sau cu g_i^-. *Gradul de incidență* al unui vîrf $x_i \in X$ (fără specificarea de grad exterior sau interior) este dat de numărul de arce incidente vîrfului x_i; el se notează cu $g(x_i)$, sau mai simplu cu g_i. În cazul unui graf orientat și fără bucle, avem evident: $g_i = g_i^+ + g_i^-$.

Pentru aplicarea grafurilor la problemele puse de practică, unui graf $G = (X, \gamma)$ i se mai atașează adesea o funcție reală $v : \gamma \to R$, numită *funcție valoare*. Această funcție face ca fiecărui arc $(x_i, x_j) \in \gamma$ să-i corespundă o valoare reală notată cu $v(x_i, x_j)$ și numită *valoarea arcului*. În acest fel,

Scanned with OKEN Scanner

graful devine un *graf evaluat* (graf ponderat) și se notează simbolic prin $G = (X, \gamma, v)$. Desigur, asemănător se pot atașa valori și muchiilor unui graf neorientat.

În ceea ce privește interpretarea valorilor ce se atașează arcelor (muchiilor) unui graf, acesta depinde de problema practică ce se rezolvă cu ajutorul modelului-graf corespunzător. Ca exemplu, dăm graful $G = (X, \gamma, v)$, în care:

— vîrfurile reprezintă punctele ce trebuie aprovizionate de un depozit,

— arcele reprezintă posibilitățile de transport între diferitele puncte ale sistemului,

— valoarea $v(x_i, x_j)$, atașată arcului $(x_i, x_j) \in X$, reprezintă cheltuielile de transport al unei unități de produs, între punctele x_i și x_j (în această ordine).

Legături între diferitele vîrfuri ale unui graf. Într-un graf orientat, numim *drum* între vîrfurile x_i și x_j, o succesiune de arce, astfel încît extremitatea inițială a fiecăruia coincide cu extremitatea finală a celui precedent, excepție făcînd extremitatea inițială a primului arc, care este x_i și extremitatea finală a ultimului arc, care este x_j. Drumul descris se reprezintă pe scurt prin $d(x_i, x_j)$, iar desfășurat se scrie astfel:

$$d(x_i, x_j) = (x_i, x_k, x_1, x_m, \ldots, x_p, x_j),$$

cu convenția că nu se scriu de două ori extremitățile ce coincid, pentru fiecare pereche de arce alăturate. Mai precis, drumul scris desfășurat mai sus este format din următoarele arce consecutive: (x_i, x_k), (x_k, x_1), (x_1, x_m), ..., (x_p, x_j); cititorul este rugat să observe că, în desfășurarea drumului, nu s-a scris de două ori la rînd x_k, sau de două ori la rînd x_1 ș.a.m.d. *Lungimea unui drum* este, prin convenție, numărul de arce din care este compus drumul. Evident, un drum de lungime egală cu unu nu este altceva decît un arc. *Valoarea unui drum* este egală cu suma valorilor arcelor ce formează drumul. Astfel, fiind dată funcția valoare $v: \gamma \to R$, valoarea drumului $d(x_i, x_j)$ este dată prin:

$$v[d(x_i, x_j)] = \sum_{(x_s, x_t) \in d} v(x_s, x_t).$$

Un drum este *elementar* dacă nu trece de două ori prin același vîrf. Vom numi, de asemenea, *drum hamiltonian* — notat prescurtat cu DH — un drum care trece prin toate vîrfurile grafului, cîte o singură dată.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă un graf orientat conține cel puțin un drum de la x_i la x_j, spunem că x_i *atinge* pe x_j, sau că x_j *este atins* de la x_i. Numărul de vîrfuri, ce pot fi atinse de la vîrful x_i, poartă numele de *putere de atingere* a vîrfului x_i și se notează cu $p(x_i)$, sau mai scurt cu p_i. Două vîrfuri, x_i și x_j, astfel încît în graful G, x_i atinge pe x_j, iar x_j atinge pe x_i, se zic vîrfuri *mutual atinse;* aceasta înseamnă de fapt că graful G conține cel puțin un drum de la x_i la x_j și cel puțin un drum de la x_j la x_i.

Se numește *circuit* într-un graf, un drum închis, în sensul că extremitatea finală a drumului coincide cu extremitatea inițială a sa. Circuitul este *hamiltonian* — notat pe scurt prin CH — dacă trece prin toate vîrfurile grafului cîte o singură dată, cu excepția extremităților, ce coincid.

Toate conceptele, definite mai sus, ce exprimă legături între diferitele vîrfuri ale unui graf, se numesc *concepte orientate,* deoarece în definirea lor se ține seama de orientarea arcelor. La baza lor stă noțiunea de drum, acesta avînd un sens ce corespunde cu sensurile tuturor arcelor ce îl compun.

Exemple de concepte orientate. Fie graful orientat din figura III.1.2. Unul dintre drumurile de la x_1 la x_5 este format din arcele (x_1, x_4) și (x_4, x_5), puse cap la cap. El se scrie astfel: $d(x_1, x_5) = (x_1, x_4, x_5)$ și are o lungime egală cu doi (este format din două arce). Un alt drum de la x_1 la x_5, de asemenea, cu o lungime egală cu doi, este drumul $d'(x_1, x_5) = (x_1, x_3, x_5)$. Există în graful dat și alte drumuri între vîrfurile x_1 și x_5. Dintre acestea, iată unul care nu este elementar, trecînd de două ori prin vîrful x_3: $d''(x_1, x_5) = (x_1, x_3, x_6, x_2, x_3, x_5)$. De asemenea, prezentăm două drumuri hamiltoniene ale grafului:

$DH_1 = (x_1, x_2, x_3, x_6, x_4, x_5)$; $DH_2 = (x_3, x_6, x_4, x_5, x_1, x_2)$.

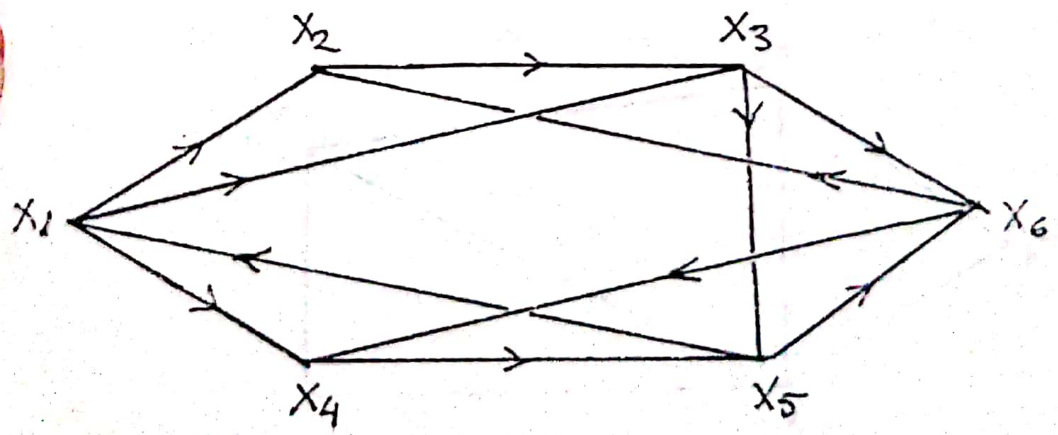


Fig. III.1.2

Scanned with OKEN Scanner

Iată și un circuit hamiltonian: $CH = (x_1, x_2, x_3, x_6, x_4, x_5, x_1)$. În sfîrșit, dăm un exemplu de circuit al grafului, care nu este hamiltonian: $d(x_2, x_2) = (x_2, x_3, x_5, x_2)$.

Conceptele neorientate, corespunzătoare celor prezentate mai sus, se definesc într-un graf neorientat. Astfel, o succesiune de muchii puse cap la cap formează un *lanț*. Dacă lanțul trece prin fiecare vîrf al grafului, cîte o singură dată, el se numește *lanț hamiltonian*, prescurtat LH. Un lanț închis (care se termină cu același vîrf cu care începe) se numește *ciclu*. Un ciclu este *hamiltonian*, dacă trece prin toate vîrfurile grafului cîte o singură dată, cu excepția primului și ultimului vîrf, care coincid; el se notează prescurtat prin CH. În lucrarea de față, vom scrie lanțurile ca și pe drumuri, dar cu paranteze drepte.

Conceptele neorientate se pot defini și într-un graf orientat, dar ele se construiesc fără a ține seama de orientările arcelor, ci considerîndu-le ca pe muchii. Astfel, pentru două arce alăturate, ce intră în compunerea unui lanț definit pe un graf orientat, pot coincide două extremități de același fel (fie extremitățile inițiale, fie cele finale). În acest fel, unele arce ale lanțului au un sens ce coincide cu sensul de citire a lanțului, iar altele au sens contrar sensului de citire a lanțului. Exemplele de mai jos vor lămuri mai bine aceste afirmații.

Exemple de concepte neorientate. Fie graful neorientat din figura III.1.3, în care există următoarele lanțuri între vîrfurile x_2 și x_4: $l_1(x_2, x_4) = [x_2, x_3, x_4]$, $l_2(x_2, x_4) = [x_2, x_5, x_4]$ $l_3(x_2, x_4) = [x_2, x_5, x_3, x_4]$ etc. Un lanț hamiltonian este următorul: $LH_1 = [x_5, x_1, x_2, x_3, x_4]$, iar un ciclu hamiltonian este $CH_1 = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1]$. Exemple de cicluri: $[x_1, x_3, x_5]$, $[x_2, x_5, x_4, x_3]$ etc.

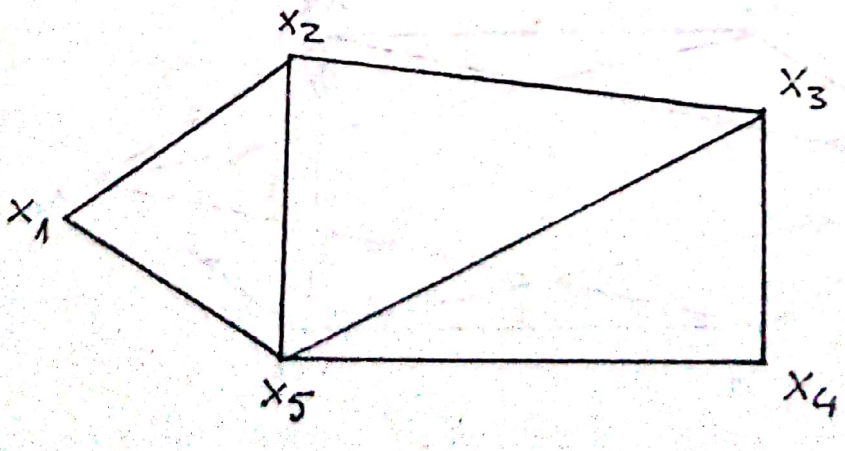


Fig. III.1.3

Scanned with OKEN Scanner

Fie acum graful orientat din figura III.1.4, în care considerăm următorul lanț: $l(x_1, x_2) = [x_1, x_5, x_3, x_2]$. El este format cu ajutorul arcelor (x_1, x_5), (x_3, x_5) și (x_2, x_3), dintre care numai sensul primului coincide cu sensul de citire a lanțului, celelalte două avînd sensuri contrare și anume:

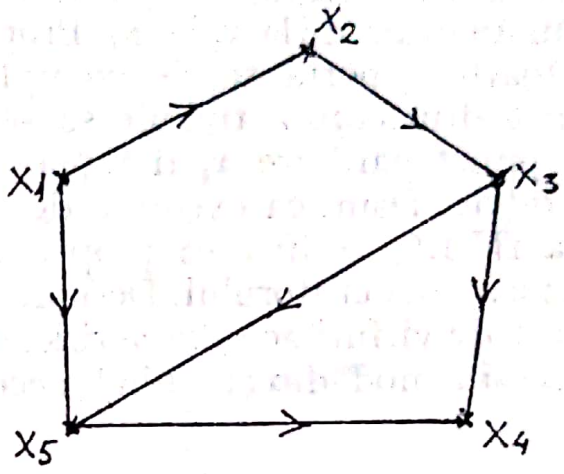


Fig. III.1.4

— arcul (x_3, x_5) apare în lanț cu sensul de citire de la x_5 către x_3,

— arcul (x_2, x_3) apare în lanț cu sensul de citire de la x_3 către x_2.

În aceeași figură, III.1.4, putem considera și ciclul $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1]$, în care ultimele două arce sînt parcurse în sens contrar sensului lor.

Tipuri de conexiune a grafurilor. Un graf (orientat sau neorientat) se numește *graf conex*, dacă pentru orice vîrfuri, x_i și x_j ale sale, există în graf cel puțin un lanț care le leagă. În cazul contrar, cînd graful conține cel puțin două vîrfuri nelegate prin nici un lanț, el este *graf neconex*. Ca exemple de grafuri conexe, putem da pe cele din figurile III.1.1 — III.1.4, iar ca exemplu de graf neconex dăm graful din figura III.1.5,

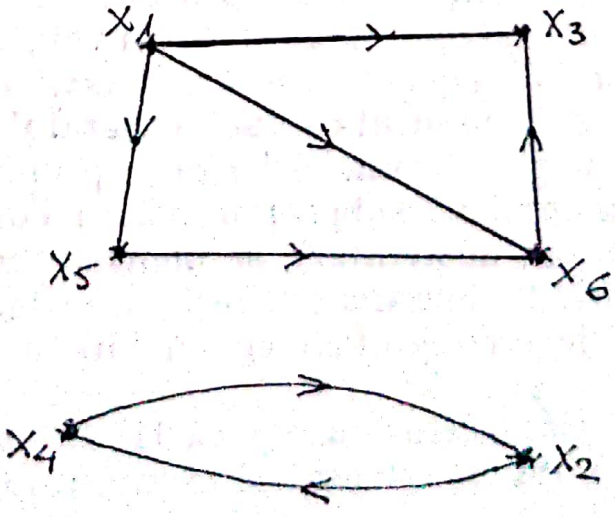


Fig. III.1.5

care are șase vîrfuri. Într-adevăr, în acest din urmă graf, vîrfurile x_1 și x_4 (de exemplu) nu sînt unite prin nici un lanț.

Un graf orientat este *tare conex*, dacă orice două vîrfuri ale sale sînt mutual atinse. Aceasta înseamnă că, dacă luăm spre cercetare două vîrfuri ale grafului, x_i și x_j, alese la întîmplare, graful conține cel puțin un drum de la x_i la x_j și cel puțin un drum de la x_j la x_i. Proprietatea de conexiune tare este foarte importantă, de exemplu, în rețelele de comunicații, în cadrul cărora trebuie să se poată ajunge oricînd de la un punct oarecare x_i al rețelei, la un alt punct x_j al aceleeași rețele. Dăm, ca exemplu de graf tare conex, pe cel din figura III.1.6, verificarea proprietății de conexiune tare rămînînd pe seama cititorului. Desigur, dacă graful ar avea un număr mare de vîrfuri această verificare nu se mai poate face cu ușurință în mod direct, fiind necesară o metodă matematică.

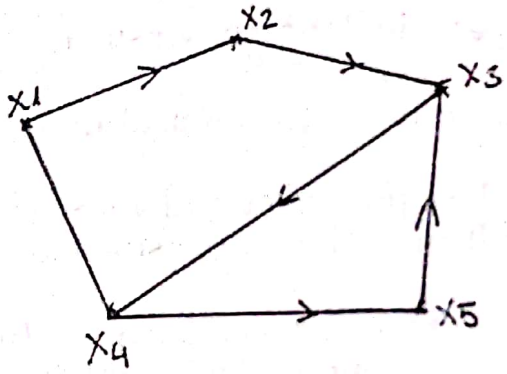


Fig. III.1.6

Grafuri deduse dintr-un graf dat. Dacă dintr-un graf G eliminăm o parte din arce (sau muchii), dar păstrăm toate vîrfurile, obținem un alt graf, care se numește *graf parțial* al lui G. De asemenea, dacă din graful G eliminăm o parte din vîrfuri, împreună cu toate arcele incidente cu vîrfurile eliminate, se obține un *subgraf* al lui G.

Un subgraf maximal tare convex, al unui graf orientat G, se numește *componentă tare conexă* a lui G. Aici, cuvîntul „maximal" are sensul că dacă subgraful menționat are măcar un vîrf în plus, atunci își pierde proprietatea de conexiune tare. Analog, un subgraf maximal conex, al unui graf G (orientat sau neorientat), se numește componentă conexă a grafului G. În lucrarea de față, vom lucra numai cu grafuri conexe, deci cu grafuri ce au cîte o singură componentă conexă.

Exemple. Graful din figura III.1.5. are două componente conexe și anume subgrafele cu mulțimile de vîrfuri $\{x_1, x_3,$

Scanned with OKEN Scanner

x_5, x_6} și {x_2, x_4}. Într-adevăr, dacă la prima submulțime a vîrfurilor am adăuga fie vîrful x_2, fie vîrful x_4, am obține subgrafuri neconexe ale celui dat inițial. Pe de altă parte, să cercetăm graful G, din figura III.1.7. Subgraful lui G, care conține numai vîrfurile x_1, x_2 și x_5, este o componentă tare conexă, deoarece:

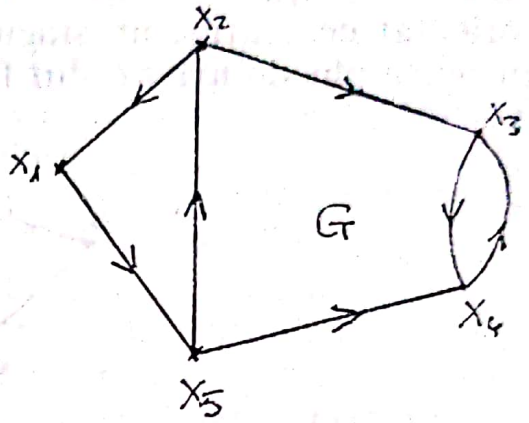


Fig. III.1.7

— între aceste vîrfuri există drumuri oricum le-am grupa, ceea ce se observă ușor în mod direct,

— dacă adăugăm la aceste vîrfuri, fie vîrful x_3, fie vîrful x_4, fie pe amîndouă, în subgraful obținut există grupe de vîrfuri între care nu există nici un drum.

Cea de a doua componentă tare convexă, a grafului G, este reprezentată de subgraful cu vîrfurile x_3 și x_4, ceea ce se verifică, de asemenea, ușor, în mod direct.

Graful condensat, corespunzător unui graf orientat G, este un graf $G^* = (X^*, \gamma^*)$, definit astfel:

— vîrfurile lui sînt componentele tare conexe ale grafului G, notate, de exemplu, prin C_1, C_2, ..., C_k,

— mulțimea γ^* conține arcul (C_r, C_s), dacă și numai dacă graful inițial G conține cel puțin un arc cu extremitatea inițială într-un vîrf din C_r și cu extremitatea finală într-un vîrf din C_s. Ca exemplu, dăm graficul condensat, al grafului G reprezentat în figura III.1.7; el are numai două vîrfuri (corespunzătoare celor două componente tare conexe indicate mai sus) și un singur arc, așa cum apare în figura III.1.8. Într-adevăr, dacă notăm cu C_1 componenta tare conexă a lui G, care conține vîrfurile x_1, x_2 și x_5, iar cu C_2 cealaltă componentă tare conexă, graful G^* va conține arcul (C_1, C_2),

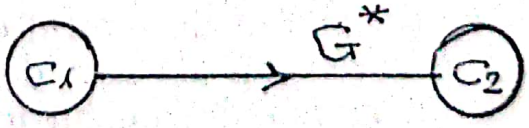


Fig. III.1.8

Scanned with OKEN Scanner

deoarece G are arcele (x_2, x_3) și (x_5, x_4), dar nu va conține arcul (C_2, C_1), neexistînd în G nici un arc de la x_3 sau x_4 spre x_1, x_2 sau x_5.

Printre grafurile neorientate, o deosebită importanță pentru aplicații o au arborii. Se numește *arbore* un graf neorientat, conex și fără cicluri. Exemple de arbori se găsesc în figura III.1.9. După cum se vede din această figură, un graf neorientat ce conține un singur lanț, este un arbore (vezi primul exemplu de arbore din figură).

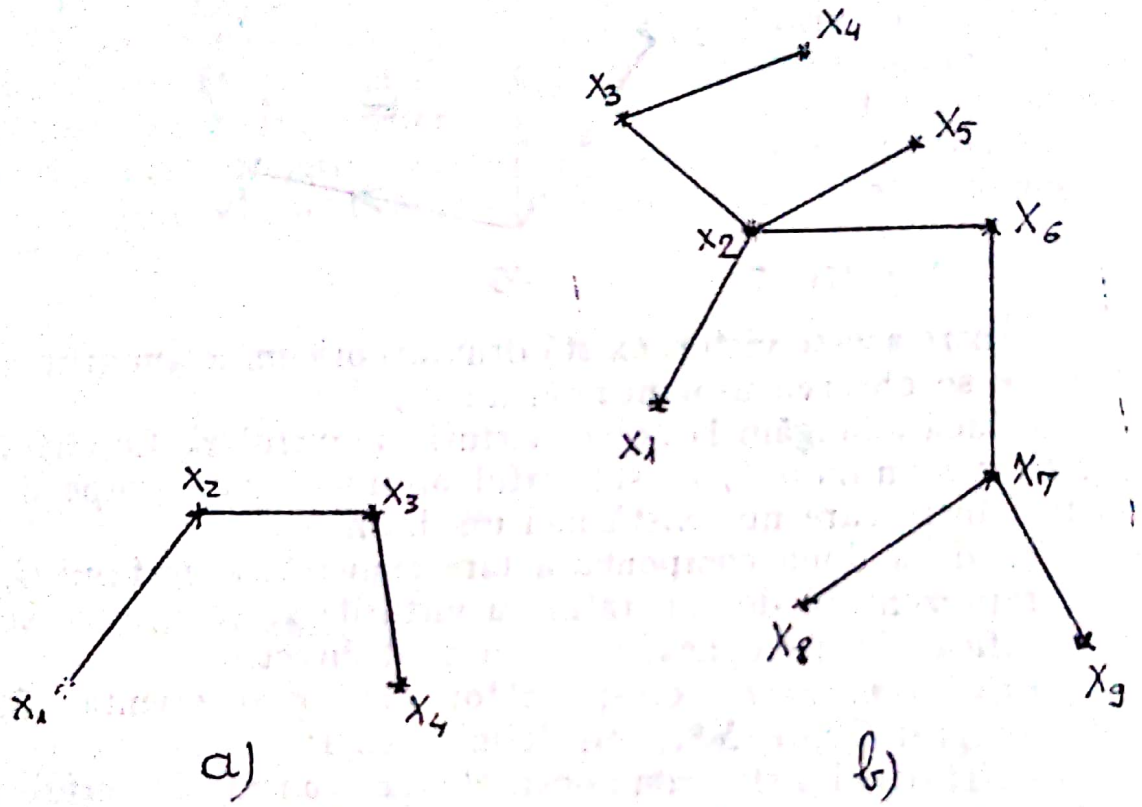


Fig. III.1.9

Deoarece studiul arborilor este foarte important, datorită aplicațiilor lor, vom prezenta în continuare anumite proprietăți ale lor. Mai întîi, arătăm că în orice arbore G, cu un număr finit de vîrfuri, există cel puțin un vîrf cu gradul de incidență egal cu unu (numit și *vîrf sau nod terminal*). Vom numi această proprietate a arborelui, cu P. Pentru a demonstra proprietatea P, să considerăm un lanț oarecare G, care leagă două din vîrfurile lui, x_i și x_j. Dacă vîrful x_i nu are gradul de incidență egal cu unu, există în graf cel puțin o muchie, ce leagă pe x_j de un vîrf x_k al grafului G, vîrf nefolosit de lanțul precedent (graful G nu conține cicluri!). În acest fel, se obține un alt lanț din G, ce leagă vîrfurile x_i și x_k și cu un număr de muchii mai mare cu o unitate

Scanned with OKEN Scanner

decît lanțul precedent. Dacă nici vîrful x_h nu are gradul de incidență egal cu unu, raționamentul de mai sus se repetă, fiind conduși la un alt lanț, ce leagă pe x_i de un alt vîrf x_1, nefolosit în lanțul precedent și cu un număr de muchii mai mare cu o unitate. Continuînd în același mod, deoarece arborele G are un număr finit de vîrfuri, acest proces va conduce în mod necesar la un vîrf al arborelui, care are gradul de incidență egal cu unu.

Considerînd un graf neorientat G, cu n vîrfuri, oricare dintre propozițiile ce urmează este echivalentă cu proprietatea că G este un arbore:

(P_1) Pentru orice pereche de vîrfuri ale lui G, există în G un lanț care le leagă și numai unui singur.

(P_2) G este un graf fără cicluri, iar adăugarea la el a unei muchii între oricare două vîrfuri nelegate inițial printr-o muchie, face să apară un ciclu și numai unul singur.

(P_3) G este un graf conex, iar suprimarea unei muchii oarecare din el face ca graful rămas să nu mai fie conex.

(P_4) G este un graf conex, cu $(n - 1)$ muchii.

(P_5) G este un graf fără cicluri, cu $(n - 1)$ muchii.

În cele ce urmează, vom demonstra echivalența fiecăreia, dintre cele cinci propoziții, cu definiția arborelui dată inițial.

În ceea ce privește propoziția P_1, echivalența este evidentă. Într-adevăr, prima dintre cele două condiții, exprimate de această propoziție, coincide cu faptul că G este conex, iar cea de a doua condiție coincide cu faptul că G nu are cicluri (existența a două lanțuri distincte între vîrfurile x_i și x_j este echivalentă cu existența unui ciclu în graf).

Echivalența propoziției P_2 cu definiția dată arborelui rezultă din următoarea observație: considerînd două vîrfuri oarecare, x_i și x_j, ale lui G, nelegate inițial printr-o muchie, adăugarea muchiei x_i, x_j închide un ciclu dacă și numai dacă în graful G există un lanț ce leagă vîrfurile x_i și x_j.

În cazul propoziției P_3, echivalența cu definiția arborelui rezultă din observația că dispariția conexiunii, în urma suprimării unei muchii, coincide cu proprietatea că graful G nu conține nici un ciclu, pe care să se afle muchia în cauză.

În continuare, ne vom opri mai mult asupra demonstrației echivalenței propoziției P_4, cu definiția data arborelui mai sus. Să pornim, mai întîi, de la faptul că graful G cu n vîrfuri este un arbore. Din definiția arborelui, știm că G este conex; rămîne să arătăm că el are $(n - 1)$ muchii. Pentru aceasta, vom aplica metoda inducției matematice. În cazul

Scanned with OKEN Scanner

particular, al unui arbore cu $n = 2$ vîrfuri, datorită conexiunii el are o singură muchie, deci proprietatea urmărită este verificată. Să presupunem acum că această proprietate este adevărată pentru $n = k$, deci că orice arbore cu k vîrfuri are $(k - 1)$ muchii. Cu această presupunere, să considerăm un arbore G, cu $(k + 1)$ vîrfuri și vom arăta că el are k muchii. Conform proprietății P, arborele G are cel puțin un vîrf cu gradul de incidență egal cu unu; fie acesta x_s. Subgraful lui G', obținut din acesta prin eliminarea vîrfului x_s și a muchiei incidente cu el, este un arbore cu k vîrfuri, deci, conform presupunerii făcute are $(k - 1)$ muchii. Rezultă că graful G are în total k muchii, ceea ce urmăream să arătăm. În consecință, din faptul că un graf neorientat este arbore, rezultă propoziția P_4. În cea de a doua parte a demonstrației, vom dovedi implicația inversă, adică faptul că din propoziția P_4 rezultă că G este un arbore. De această dată, prin ipoteză cunoaștem că G este un graf conex cu n vîrfuri și $(n - 1)$ muchii. Graful fiind conex, din fiecare vîrf pornește cel puțin o muchie; va exista însă cel puțin un vîrf, din care pornește o singură muchie. Într-adevăr, presupunînd prin absurd că din fiecare vîrf pornesc cel puțin două muchii, graful G ar avea cel puțin n muchii, ceea ce nu se poate. Pentru a arăta că G nu are cicluri, vom folosi din nou metoda inducției matematice. Pentru $n = 2$, adică pentru un graf cu două vîrfuri și o singură muchie, această proprietate este evidentă. Să presupunem acum că proprietatea este adevărată pentru $n = k$, adică orice graf conex cu k vîrfuri și $(k - 1)$ muchii nu are cicluri. Cu această presupunere, să considerăm un graf G, conex, cu $(k + 1)$ vîrfuri și k muchii și vom arăta că el nu conține cicluri. Conform celor arătate mai sus, graful G conține cel puțin un vîrf cu gradul de incidență egal cu unu, adică un vîrf din care pornește o singură muchie: fie acesta x_s. Subgraful lui G, obținut din acesta prin eliminarea vîrfului x_s și a muchiei incidente cu el, este un graf conex cu k vîrfuri și $(k - 1)$ muchii, deci, conform propunerii făcute, nu conține cicluri. În plus, muchia eliminată din G nu poate închide nici un ciclu, ceea ce înseamnă că G' nu conține, de asemenea, nici un ciclu. În consecință, din propoziția P_4 rezultă că graful G este un arbore și echivalența propusă a fost demonstrată complet.

Echivalența propoziției P_5, cu definiția dată inițial arboreului, se demonstrează în mod asemănător cu cea prece-

Scanned with OKEN Scanner

dentă, folosind inducția matematică. Lăsăm pe seama cititorului această demonstrație.

Din ultimele două propoziții, echivalente cu definiția noțiunii de arbore, reținem pe scurt o proprietate importantă, ce va fi folosită în mod deosebit și pe care o subliniem mai jos:

Proprietate importantă. Orice arbore cu n vîrfuri are $(n-1)$ muchii.

Fiind dat un graf neorientat G, un subgraf al său, care este arbore, se numește *arbore al lui G*. Un caz particular de arbore al unui graf este și lanțul. Evident, putem considera noțiunea de arbore al unui graf G și dacă G este orientat, caz în care nu se ține seama de orientarea arcelor (ele sînt considerate ca muchii).

Dacă un arbore al unui graf conține toate vîrfurile lui G, el se numește *arbore-acoperire*. Am putea spune deci că un arbore-acoperire, al unui graf G, este un graf parțial al acestuia, care este arbore. În figura III.1.10 b este reprezentat un arbore-acoperire al grafului neorientat alăturat lui. Cititorul poate arăta cu ușurință că un graf neorientat oarecare conține cel puțin un arbore-acoperire.

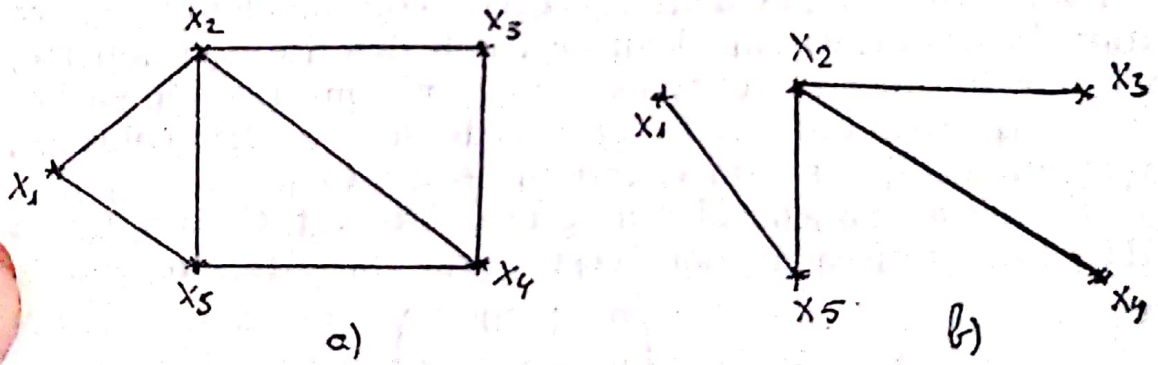


Fig. III.1.10

Matrici atașate unui graf orientat. Pentru rezolvarea diferitelor probleme practice, cu ajutorul modelelor-grafuri, mai ales în cazul unor grafuri de dimensiuni mari, este necesar ca acestea să fie reprezentate sub forma unor matrici, pe care calculele se efectuează ușor.

Fiind dat un graf orientat G, cu n vîrfuri, se numește *matricea arcelor* a acestui graf o matrice pătrată A, de ordinul n, ale cărei elemente sînt egale cu zero și cu unu, construită după regula următoare: elementul ce se află la intersecția liniei de ordin i, cu coloana de ordin j, este egal cu unu dacă graful G conține arcul (x_i, x_j) și este egal cu zero dacă graful

Scanned with OKEN Scanner

nu conține acest arc. Putem reprezenta matricea arcelor grafului $G = (X, \gamma)$ simbolic, sub forma următoare:

$$A = (a_{ij}),\ i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

unde:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ dacă } (x_i, x_j) \in A, \\ 0, \text{ în caz contrar} \end{cases}$$

Convenție importantă: elementele matricei arcelor grafului G le vom nota totdeauna cu a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Deoarece toate elementele matricei A sînt egale cu zero și unu, se spune că aceasta este o *matrice booleană* (se citește matrice buleană). Accentuăm încă odată că existența unui arc, între două vîrfuri fixate ale grafului, este pusă în evidență de un element egal cu unu din matricea A, după regula: extremitatea inițială a arcului corespunde la linie, iar extremitatea finală la coloana matricei, în care se găsește elementul egal cu unu. De aceea, putem spune că liniile consecutive ale matricei A corespund la vîrfurile grafului, așezate într-o ordine stabilită (de exemplu, în ordinea crescătoare a indicilor, $x_1, x_2, \ldots, x_n$), iar coloanele consecutive ale matricei A corespund, de asemenea, vîrfurilor grafului, așezate în aceeași ordine. Pentru a evidenția această corespondență, ce va ajuta în urmărirea calculelor ce vor fi descrise mai departe, vîrfurile în cauză se pot trece pe marginile matricei, în partea stîngă (pentru linii) și în partea de sus (pentru coloane), așa cum rezultă și din exemplul ce urmează.

Exemplu. Să considerăm graful orientat G, din figura III.1.11. Matricea arcelor acestui graf este următoarea:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

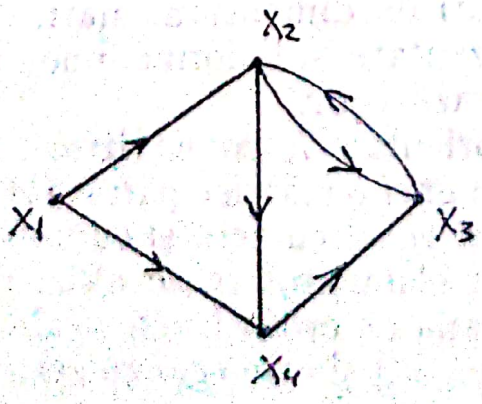


Fig. III.1.11

Scanned with OKEN Scanner

Pentru o urmărire mai ușoară a modului în care s-a completat această matrice, ca și pentru folosirea ei în eventualele calcule, vom obișnui să scriem matricea arcelor ca în tabelul III.1.1, notînd în evidență vîrfurile ce corespund la diferitele linii și coloane ale ei. Astfel, de exemplu, elementul egal cu unu de pe linia x_1 și coloana x_2, arată existența în graf a arcului (x_1, x_2). De asemenea, elementul egal cu zero, de pe linia x_1 și coloana x_3, arată că în graful G nu există arcul (x_1, x_3).

Tabelul III.1.1.

A:

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	0	1
x_2	0	0	1	1
x_3	0	1	0	0
x_4	0	0	1	0

Observație importantă. Conform convenției făcute, în partea stîngă a matricei A sînt scrise totdeauna *plecările* arcelor, iar în partea de sus a matricei *sosirile* acestor arce (arce corespunzătoare elementelor egale cu unu).

Alte observații. 1. Faptul că un graf G nu conține bucle se poate deduce din inexistența elementelor egale cu unu, de pe diagonala principală a matricei arcelor acestui graf.

2. Deoarece elementele egale cu unu, de pe linia x_i a matricei arcelor unui graf G, reprezintă singurele arce ce au ca punct de plecare vîrful x_i, suma elementelor liniei x_i este egală cu gradul exterior de incidență al acestui vîrf. Analog, suma elementelor de pe coloana x_j, din matricea arcelor unui graf G, este egală cu gradul interior de incidență al vîrfului x_j.

O altă matrice, ce se atașează unui graf orientat G cu n vîrfuri și pe care o folosim în mod deosebit, este *matricea drumurilor*, pe care o notăm cu D. Ea este, de asemenea, o matrice booleană, pătratică de ordinul n. O vom reprezenta simbolic prin:

$$D = (d_{ij}),\ i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

unde:

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ dacă } G \text{ conține cel puțin un drum } d(x_i, x_j), \\ 0, \text{ în caz contrar.} \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru o utilizare comodă a matricei drumurilor, aceasta va fi reprezentată sub forma unui tabel asemănător cu cel folosit la matricea arcelor, adică în care atît liniile cît și coloanele corespund la vîrfurile grafului, puse într-o anumită ordine. Convenția este aceeași, liniile corespunzînd la plecările de drumuri, iar coloanele la sosirile acestor drumuri.

Observații. 1. Existența unor elemente egale cu unu, pe diagonala principală a matricei drumurilor, arată existența unor circuite în graful G. Evident, dacă matricea drumurilor unui graf are toate elementele de pe diagonala principală egale cu zero, graful corespunzător nu are circuite și reciproc.

2. Graful G este tare conex dacă și numai dacă toate elementele matricei drumurilor sînt egale cu unu. Această observație poate folosi ca metodă de verificare a faptului că un graf este sau nu tare conex.

3. Elementele egale cu unu, de pe linia x_i a matricei drumurilor unui graf G, arată spre ce vîrfuri pornesc drumuri din x_i, adică ce vîrfuri sînt atinse de la x_i. În acest sens, suma elementelor de pe linia x_i a matricei drumurilor este egală cu puterea de atingere a vîrfului x_i. În plus, putem preciza că elementele egale cu unu, de pe coloana x_i a matricei drumurilor, arată de la ce vîrfuri este atins x_i în graful considerat.

Metodă de calcul a matricei drumurilor. În cele ce urmează vom arăta, pe baza unui exemplu, cum se poate calcula matricea drumurilor unui graf orientat, pornind de la matricea arcelor a sa. Fie graful G, din figura III.1.12, a cărui matrice a arcelor A este reprezentată în tabelul III.1.2. Să calculăm, mai întîi, prima linie din matricea drumurilor D, linie ce corespunde vîrfului x_1: ea va conține ca elemente egale cu unu, pe cele ce indică existența drumurilor din graf, ce pornesc din x_1. Există, evident, două drumuri cu lungimea egală cu unu, de acest fel, ele fiind formate din arcele (x_1, x_2) și (x_1, x_3), deci $d_{12} = 1$ și $d_{13} = 1$. Aceasta înseamnă, în

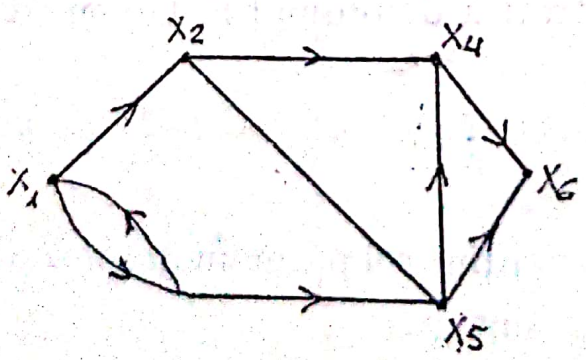


Fig. III.1.12

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul III.1.2.

(A)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	1	0	0	0
x_2	0	0	0	1	1	0
x_3	1	0	0	0	1	0
x_4	0	0	0	0	0	1
x_5	0	0	0	1	0	6
x_6	0	0	0	0	0	0

general, că linia x_1 din matricea drumurilor conține, pe lîngă alte eventuale elemente egale cu unu: pe cele de pe linia corespunzătoare a matricei arcelor. Completînd, într-o primă etapă, linia x_1 din D cu elementele egale cu unu, ce corespund la drumuri de lungime egală cu unu, aceasta are forma următoare (formă intermediară):

(1)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		1v	1			

Aci, pe locurile rămase libere considerăm zerouri, pe care nu le scriem, deocamdată, deoarece se pot transforma în elemente egale cu unu (dacă există drumuri corespunzătoare, de lungimi mai mari ca unu).

Să cercetăm acum existența sau inexistența, pentru locurile rămase libere, a unor drumuri de cîte două arce. Deoarece aceste drumuri trebuie să plece din x_1, ele încep, fie cu arcul (x_1, x_2), fie cu (x_1, x_3) și se continuă cu încă cîte un arc, ce pornește respectiv din x_2 sau x_3. Să considerăm aceste posibilități pe rînd. Astfel, luînd spre cercetare arcul (x_1, x_2) indicat prin primul element egal cu unu de pe linia incompletă de mai sus), el trebuie prelungit cu un alt arc, ce pornește din x_2. Astfel de arce sînt indicate însă de elementele egale cu unu, de pe linia x_3 din matricea arcelor; există două astfel de elemente, unul în dreptul coloanei x_4 și altul în dreptul coloanei x_5, ele indicînd deci existența în graf a arcelor (x_2, x_4) și (x_2, x_5). Cuplînd arcele în cauză, rezultă că graful dat conține drumurile (x_1, x_2, x_4) și (x_1, x_2, x_5), adică x_1 atinge atît pe x_4 cît și pe x_5. Consemnăm cele de mai sus, prin completarea liniei x_1 din matricea drumurilor, cu încă două elemente, ea căpătînd forma intermediară următoare:

(2)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		1v	1v	1	1	

Scanned with OKEN Scanner

Și de această dată, locurile rămase libere sînt considerate ca zerouri, dar nu au fost efectiv completate, deoarece unele dintre ele se pot transforma în elemente unu (dacă există în graf unele drumuri de cître trei sau mai multe arce).

A fost folosit elementul egal cu unu, din dreptul coloanei x_2, al schemei (1), fapt indicat pe această schemă printr-o bifă. Continuăm raționamentul folosind elementul egal cu unu din dreptul coloanei x_3, bifat și el în schema (2). Arcul (x_1, x_3) poate fi prelungit cu un arc ce pleacă din x_3: există două astfel de arce (x_3, x_1) și (x_3, x_5), indicate de elementele egale cu unu de pe linia x_3 a matricei A. Aceasta înseamnă că graful G conține drumurile (x_1, x_3, x_1) și (x_1, x_3, x_5). Existența primului, dintre aceste două drumuri, ne determină să punem $d_{11} = 1$ (primul element al liniei x_1 din D este egal cu unu). Cel de al doilea drum nu mai modifică linia x_1 din schema (2), deoarece în această schemă este marcat anterior $d_{15} = 1$. Aceasta se explică prin faptul că de la x_1 la x_5 există mai mult decît un drum (unul prin x_2, altul prin x_3), iar noi marcăm cu unu existența a *cel puțin* unui drum între vîrfurile respective. Consemnarea raționamentului de mai sus conduce la următoarea formă intermediară a liniei x_1 din matricea D:

(3)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1v	1v	1v	1v	1	

în care a rămas necompletat un singur loc. Pentru eventuala completare cu unu, a locului rămas liber, să cercetăm existența în graf a drumurilor de cître trei arce. Un astfel de drum este compus dintr-un drum de două arce, prelungit cu încă un arc. Drumurile de cîte două arce sînt reprezentate însă sub forma elementelor egale cu unu, apărute în etapa precedentă: există drumuri de acest fel de la x_1 la x_1, x_4 și x_5, deoarece pe linia x_1 din schema (3) au apărut elemente egale cu unu în dreptul coloanelor x_1, x_4, și x_5. Cercetarea posibilităților de prelungire a lor cu cîte un arc decurge în felul următor:

a) Drumul de la x_1 la x_1 se poate prelungi cu arcul (x_1, x_2) sau cu arcul (x_1, x_3), dînd drumuri de la x_1 la x_2 sau de la x_1 la x_3. Existența unor asemenea drumuri este indicată însă în schema (3), prin elemente egale cu unu în dreptul coloanelor x_2 și x_3 (au existat drumuri cu lungimi mai mici, între vîrfurile respective).

Scanned with OKEN Scanner

b) Drumul de la x_1 la x_4 se poate prelungi cu arcul (x_4, x_6) indicat de elementul $a_{46} = 1$ de pe linia x_4 a matricei A. Există deci un drum de trei arce, de la x_1 la x_6, ceea ce se va marca printr-un element egal cu unu în locul rămas liber în schema (3). Obținem astfel schema următoare:

(4)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1	1	1	1	1	1

în care nu mai are rost să continuăm operațiile, deoarece nu mai poate apărea nici un element egal cu unu. Prima linie, a matricei drumurilor grafului G, are numai elemente egale cu unu, ceea ce înseamnă că x_1 atinge toate vîrfurile grafului.

Să sintetizăm calculele efectuate pînă acum, pentru a da o regulă generală, de determinare a liniei x_1 din matricea D, metodă în care să nu mai fie nevoie de a interpreta de fiecare dată unele sau altele dintre drumurile existente în graf. Pentru aceasta, vom folosi operația de *adunare booleană* a două numere, ce se execută numai în cadrul mulțimii $\{0, 1\}$. Semnul acestei operații este semnul obișnuit de adunare a numerelor (semnul plus), cu un punct deasupra. Cele patru posibilități de adunare booleană, a două numere, se definesc astfel:

$$0 \dot{+} 0 = 0;\ 0 \dot{+} 1 = 1;\ 1 \dot{+} 0 = 1;\ 1 \dot{+} 1 = 1.$$

Se observă că adunarea booleană a unui termen egal cu unu, face totdeauna ca rezultatul să fie egal cu unu (indiferent de termenul la care se adună el).

Revenind la modul de calcul al liniei x_1 din matricea D, observăm că ea începe cu linia corespunzătoare (linia x_1) din matricea A (vezi schema (1)). Cele două elemente egale cu unu, de pe această linie, se găsesc în dreptul coloanelor x_2 și x_3; de aceea, adunăm boolean la linia din schema (1), liniile x_2 și x_3 din matricea arcelor (evident, pe rînd, bifînd elementele folosite, obținînd schemele (2) și (3)). În acest fel, au apărut noi elemente egale cu unu, ce se găsesc în dreptul coloanelor x_1, x_4 și x_5. Conform acestor noi elemente apărute, adunăm boolean la linia din schema (3), liniile x_1, x_4 și x_5, din matricea arcelor. Astfel de operații ar fi continuat cît era posibil dacă nu s-ar fi completat toată linia din schema (4) cu elemente egale cu unu.

Scanned with OKEN Scanner

Din modul în care am raționat pentru calculul liniei x_1 a matricei D, putem deduce cu ușurință că deducerea oricărei linii x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, a matricei D, se poate face în mod asemănător, dar pornind inițial de la linia corespunzătoare x_i, a matricei arcelor. Astfel, pentru a calcula linia x_2, a matricei drumurilor, pornim de la schema următoare, în care am marcat numai elementele egale cu unu de pe linia x_2 a matricei A.

(5)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2				1v	1	

În schema (5) am bifat elementul egal cu unu din dreptul coloanei x_4, urmînd să adunăm boolean la linia x_2 a schemei, linia x_4 din matricea A. Această adunare booleană mai aduce un element egal cu unu, în dreptul coloanei x_6, ajungîndu-se la schema următoare:

'6)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2				1v	1v	1v

În schema (6) am bifat elementul egal cu unu, din dreptul coloanei x_5, urmînd să adunăm boolean, la linia din schema respectivă, linia x_5 din matricea arcelor; această operație nu mai aduce nimic nou la schema (6), existînd elemente egale cu unu în dreptul coloanelor x_4 și x_6. Vom bifa deci și elementul egal cu unu, din dreptul coloanei x_6, urmînd să adunăm boolean linia x_6 din matricea arcelor; nici această operație nu aduce nimic nou, linia în cauză fiind plină cu zerouri. Deoarece procesul de mai sus nu mai poate continua (nemaiexistînd elemente egale cu unu nebifate), completăm efectiv locurile libere cu zerouri, rezultînd astfel linia x_2 din matricea drumurilor:

(7)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	0	0	0	1	1	1

Procedînd în mod asemănător cu toate vîrfurile grafului G, se obține matricea drumurilor acestui graf, ce se găsește în tabelul III.1.3.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul III.1.3.

(D)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1	1	1	1	1	1
x_2	0	0	0	1	1	1
x_3	0	1	1	1	1	1
x_4	1	0	0	0	0	1
x_5	0	0	0	1	0	1
x_6	0	0	0	0	0	0

Observație. Ordinea în care se bifează elementele egale cu unu, pentru a face adunările booleene corespunzătoare, este indiferentă (chiar dacă aceste elemente au apărut mai devreme sau mai tîrziu). De asemenea, dacă una din liniile matricei D' a fost calculată, fie ea linia x_i, iar la un moment dat urmează să adunăm boolean, la una din linii, linia x_i a matricei A, putem înlocui această adunare cu adunarea booleană a liniei x_i din matricea D, ceea ce poate scurta calculul. Lăsăm pe seama cititorului justificarea acestor proprietăți, ce sînt destul de intuitive.

Proprietăți importante

1. Deoarece $d_{ij} = 1$, dacă și numai dacă x_i atinge pe x_j, rezultă că suma elementelor de pe linia x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, a matricei drumurilor, reprezintă puterea de atingere a vîrfului x_i.

2. Elementele egale cu unu, de pe diagonala principală a matricei drumurilor, arată existența în graf a unor circuite. De aici rezultă și o metodă de a testa dacă un graf este fără circuite: se calculează matricea drumurilor sale, ea trebuind să aibă pe diagonala principală numai elemente egale cu zero.

Proprietăți ale matricei drumurilor unui graf fără circuite

Teorema III.1.1. Dacă în matricea drumurilor unui graf fără circuite, vîrfurile sînt scrise într-o ordine descrescătoare a puterilor de atingere, această matrice este triangulară superior, adică toate elementele egale cu unu din ea se găsesc deasupra diagonalei principale.

Pentru justificarea acestei teoreme, să notăm vîrfurile grafului, scrise într-o ordine descrescătoare a puterilor de atingere, prin $x'_1, x'_2, x'_3, \ldots, x'_n$, deci:

$$p(x'_1) \geqslant p(x'_2) \geqslant p(x'_3) \geqslant \ldots \geqslant p(x'_n).$$

Scanned with OKEN Scanner

Evident, aceste vîrfuri sînt tot vîrfurile $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, dar scrise eventual într-o altă ordine. Menționăm în plus că, atunci cînd unele vîrfuri ale grafului au puteri de atingere egale, aceste vîrfuri se așează între ele într-o ordine indiferentă, ceea ce justifică semnele de egalitate, din înșiruirea de mai sus a puterilor de atingere.

Matricea drumurilor, grafului dat, în care vîrfurile sînt scrise în ordinea $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, are forma din tabelul III.1.4, ea fiind notată cu D'.

Tabelul III.1.4

(D')	$x'_1, \ldots, x'_2, \ldots, x'_i, \ldots, x'_j, \ldots, x'_n$
x'_1	
x'_2	
$\vdots$	
x'_i	d'_{ij}
$\vdots$	
x'_j	
$\vdots$	
x'_n	

Să notăm elementele ei cu $d'_{ij}, i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n$, elementul d'_{ij} fiind cel ce se află la intersecția liniei x'_i cu coloana x'_j. În tabelul III.1.4, aceste elemente nu apar, ele fiind cercetate în cele ce urmează. Trebuie să arătăm că un element oarecare al matricei, care este egal cu unu, nu se poate afla decît deasupra diagonalei principale, marcată printr-o linie în tabel. Fie din elementul $d'_{ij} = 1$ și să arătăm că $i < j$, adică linia x'_i (respectiv coloana x'_i) se află înaintea liniei x'_j (respectiv a coloanei x'_j), ca în tabelul III.1.4. Aceasta înseamnă că trebuie să arătăm că vîrful x'_i are o putere de atingere cel puțin egală cu aceea a vîrfului x'_j. Pentru aceasta, să folosim definiția matricei drumurilor, din care deducem că graful dat conține cel puțin un drum de la x'_i la x'_j (avem $d'_{ij} = 1$). Privind figura III.1.13, observăm că, în condițiile menționate, orice vîrf atins de la x'_j, este atins și de la x'_i; în plus x'_i atinge încă cel puțin un vîrf

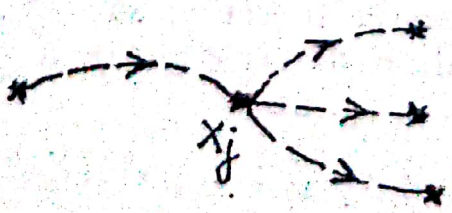


Fig. III.1.13

Scanned with OKEN Scanner

în plus, pe x_j, ceea ce înseamnă că $p(x_i) > p(x_j)$. Cu aceasta, justificarea teoremei este completă.

Vom numi matricea drumurilor, în care vîrfurile sînt scrise într-o ordine descrescătoare a puterilor de atingere, *matricea drumurilor triangularizată*, ea fiind notată cu D'. În această matrice, toate elementele de pe diagonala principală și de sub această diagonală, sînt egale cu zero. Așa cum s-a arătat, toate elementele diferite de zero (egale cu unu) ale matricei se află deasupra diagonalei principale, putînd însă exista deasupra acestei diagonale și elemente nule.

Observație. Pentru a scrie matricea D', corespunzătoare unui graf fără circuite, calculăm mai întîi matricea drumurilor grafului, din care se determină puterile de atingere ale vîrfurilor. Apoi, în matricea D schimbăm ordinea liniilor, apoi a coloanelor, conform unei succesiuni a vîrfurilor, avînd puteri de atingere descrescătoare. Exemplul ce urmează va lămuri pe deplin metoda.

Exemplu. Fie graful G, din figura III.1.14, a cărui matrice a drumurilor este conținută de tabelul III.1.5. În partea

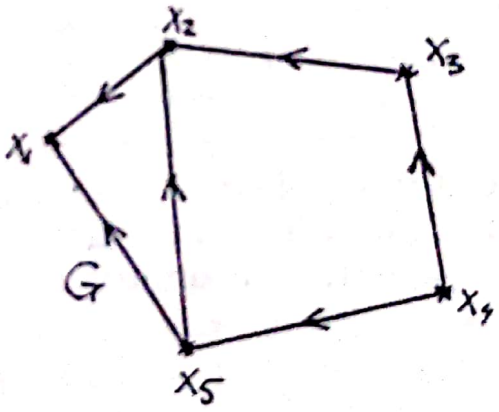


Fig. III.1.14

dreaptă a acestui tabel sînt calculate puterile de atingere ale vîrfurilor, ca sume ale elementelor de pe liniile matricei D. Cea mai mare putere de atingere o are vîrful $x_4(p_4 = 4)$,

Tabelul III.1.5.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	p_i
(D)	x_1	0	0	0	0	0	0
	x_2	1	0	0	0	0	1
	x_3	1	1	0	0	0	2
	x_4	1	1	1	0	1	4
	x_5	1	1	0	0	0	2

Scanned with OKEN Scanner

ceea ce înseamnă că în noua înșiruire a vîrfurilor, vom începe cu $x_4 (x_1' = x_4)$. Urmează vîrfurile x_3 și x_5, cu puterile de atingere egale ($p_3 = p_5 = 2$), pe care le vom așeza într-o ordine arbitrară, de exemplu $x_2' = x_3$ și $x_3' = x_5$. Vor urma apoi în ordine, vîrful $x_4' = x_2$ (cu puterea de atingere egală cu unu) și vîrful $x_5' = x_1$ (cu putere de atingere nulă). În cazul nostru, succesiunea teoretică a vîrfurilor, x_1', x_2', x_3', x_4', x_5', este următoarea:

$$x_4,\ x_3,\ x_5,\ x_2,\ x_1.$$

Să schimbăm, mai întîi, ordinea liniilor matricei D, conform acestei noi succesiuni a vîrfurilor, păstrînd ordinea coloanelor neschimbată; obținem astfel matricea intermediară $\widetilde{D}$, din tabelul III.1.6. În această matrice intermediară,

Tabelul III.1.6

$(\widetilde{D})$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	1	1	1	0	1
x_3	1	1	0	0	0
x_5	1	1	0	0	0
x_2	1	0	0	0	0
x_1	0	0	0	0	0

schimbăm ordinea coloanelor, astfel încît să coincidă cu ordinea nouă fixată mai sus, deci cu ordinea liniilor. Se obține astfel matricea drumurilor triangularizată D', din tabelul III.1.7.

Tabelul III.1.7

(D')

	x_4	x_3	x_5	x_2	x_1
x_4	0	1	1	1	1
x_3	0	0	0	1	1
x_5	0	0	0	1	1
x_2	0	0	0	0	1
x_1	0	0	0	0	0

Observație. Un rezultat asemănător s-ar fi obținut, dacă în ordinea descrescătoare a puterilor de atingere, vîrfurile s-ar fi așezat în succesiunea x_4, x_5, x_3, x_2, x_1.

Teorema III.1.2. În matricea drumurilor triangularizată, corespunzătoare unui graf fără circuite, primul element egal

Scanned with OKEN Scanner

cu unu de pe fiecare linie și ultimul element egal cu unu de pe fiecare coloană, corespund la drumuri de cîte un singur arc în vîrf.

Pentru justificare, să considerăm $d'_{ij} = 1$, ca prim element egal cu unu, de pe linia x'_i a matricei D'. Pe de o parte, acest lucru înseamnă că graful conține cel puțin un drum de la x'_i la x'_j. Să presupunem prin absurd că ar exista un astfel de drum cu mai mult de un arc, deci care ar trece printr-un vîrf intermediar $x'_m \neq x'_i$. Reprezentăm acest drum prin $d = (x'_i, \ldots, x'_m, \ldots, x'_j)$. Este clar de aci, că graful dat conține cel puțin un drum de la x'_i la x'_m, adică $d'_{im} = 1$; în plus, puterea de atingere a lui x'_m este mai mare decît a lui x'_j (orice vîrf atins de la x'_j este atins și de la x'_m). În consecință, coloana x'_m se găsește înaintea coloanei x'_j în matricea D', ceea ce înseamnă că elementul $d'_{im} = 1$ se află pe linia x'_i, înaintea elementului $d'_{ij} = 1$. Această concluzie este însă absurdă prin ipoteză fiind precizat că $d'_{ij} = 1$ este primul element egal cu unu, de pe linia x'_i. Ca urmare, un vîrf intermediar, de forma x'_m, nu poate exista în drumul de la x'_i la x'_j: drumul $d(x'_i, x'_j)$ — (care sigur există) nu poate fi format decît dintr-un singur arc, (x'_i, x'_j). În mod asemănător se poate arăta că ultimul element egal cu unu, de pe o coloană x'_j, a matricei D', corespunde la un arc în graf; lăsăm pe seama cititorului această justificare.

Metodă pentru determinarea componentelor tare conexe ale unui graf orientat. O componentă tare conexă, a unui graf G, este determinată atunci cînd se cunoaște mulțimea M, a vîrfurilor sale. Într-adevăr, componenta reprezentînd un subgraf al grafului G, are drept arce toate arcele lui G, care au ambele extremități în mulțimea M, aceste arce putîndu-se deci determina cu ușurință dacă se cunoaște M. În cele ce urmează, căutăm o metodă pentru determinarea mulțimii M, a vîrfurilor unei componente tare conexe, din care face parte un vîrf fixat, $x_i \in X$. Notăm această mulțime prin $M(x_i)$, componenta tare conexă corespunzătoare fiind $C(x_i)$. Este evident că, utilizînd aceste notații, dacă vîrfurile x_i și x_j fac parte din aceeași componentă tare conexă, avem $C(x_i) = C(x_j)$, respectiv $M(x_i) = M(x_j)$. Vom folosi în mod deosebit proprietatea aproape evidentă că orice două vîrfuri din G, care sînt mutual atinse, fac parte din aceeași componență tare conexă (o justificare riguroasă a afirmației este ușor de făcut și o lăsăm pe seama cititorului).

Scanned with OKEN Scanner

În cele de mai jos, facem raționamentul de deducere a metodei cerute, pe baza unui exemplu, anume vom căuta componenta tare conexă ce conține vîrful x_1, pe graful G din figura III.1.15. Această componentă, notată cu $C(x_1)$, va conține toate vîrfurile grafului G, mutual atinse cu x_1 (con-

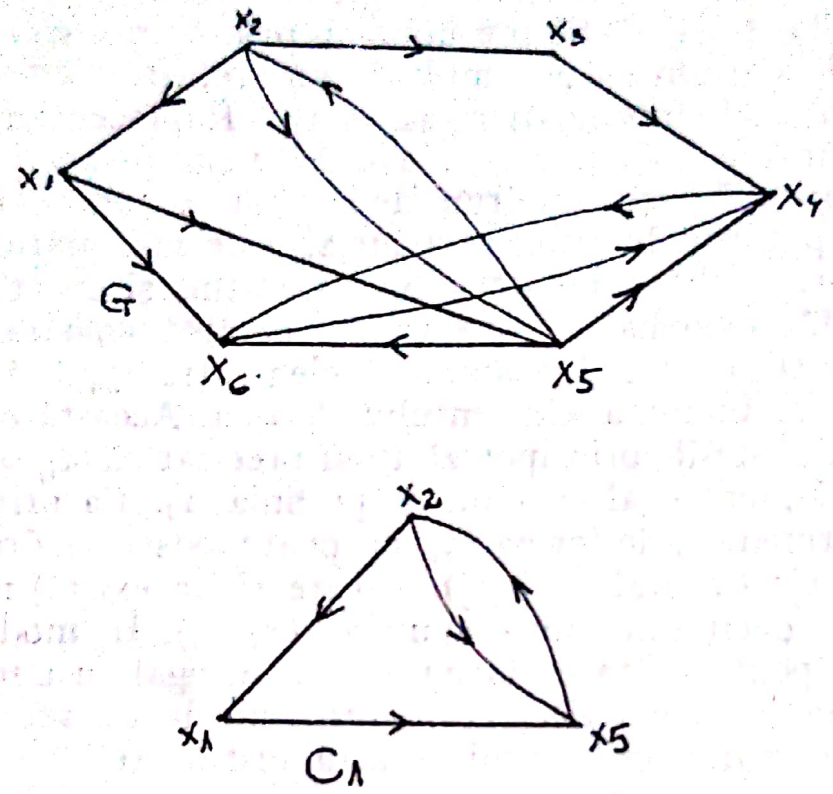


Fig. III.1.15

form proprietății menționate anterior) și numai pe acestea (conform definiției conexiunii tari). De aceea, vom determina separat următoarele două submulțimi de vîrfuri ale grafului G:

— mulțimea vîrfurilor atinse de la x_1, pe care o vom nota cu V_1.

— mulțimea vîrfurilor ce ating pe x_1, pe care o vom nota cu V_1'.

Cu notațiile indicate, este clar că mulțimea vîrfurilor mutual atinse cu x_1 va fi dată de intersecția $V_1 \cap V_1'$. Deoarece există și posibilitatea ca această intersecție să fie vidă, caz în care componenta tare conexă căutată este formată numai din vîrful x_1, vom scrie, în general, următoarea formulă de calculul a mulțimii vîrfurilor componentei $C(x_1)$:

$$\text{(i)}\quad M(x_1) = (V_1 \cap V_1') \cup \{x_1\}$$

Arătăm acum în ce mod se calculează submulțimile de vîrfuri V_1 și V_1'. Este cunoscut faptul că vîrfurile atinse de

Scanned with OKEN Scanner

la x_1, în graful G, sînt indicate prin elementele egale cu unu, de pe linia x_1 a matricei drumurilor. În tabelul III.1.8 este

Tabelul III.1.8

(A)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	V_1'
x_1	0	0	0	0	1	1	1
x_2	1	0	1	0	1	0	1
x_3	0	0	0	1	0	0	0
x_4	0	0	0	0	0	1	0
x_5	0	1	0	1	0	1	1
x_6	0	0	0	1	0	0	0
V_1	1	1	1	1	1	1	1

scrisă matricea arcelor grafului G, sub care este calculată linia x_1 din matricea drumurilor (cu ajutorul metodei prezentate anterior). Această linie este notată cu V_1, deoarece elementele egale cu unu, de pe ea, arată ce vîrfuri sînt atinse de la x_1. Mai precis, deoarece există elemente egale cu unu, în dreptul tuturor coloanelor tabelului, putem scrie:

$$V_1 = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6\}.$$

Pornind de la coloana x_1 a matricei A și efectuînd operații analoage, dar pe coloane, obținem în dreapta tabelului o coloană suplimentară V_1', ale cărei elemente egale cu unu indică vîrfurile ce ating pe x_1 în graful G. Aceste calcule sînt efectuate, de asemenea, în tabelul III.1.8, decurgînd conform următoarei succesiuni de operații:

— mai întîi s-a scris, pe coloana V_1', elementul egal cu unu, din dreptul liniei x_2, un astfel de element aflîndu-se inițial pe coloana x_1,

— datorită elementului egal cu unu menționat, s-a adunat boolean la coloana V_1', coloana x_2, această adunare aducînd un nou element egal cu unu, în dreptul liniei x_5.

— datorită noului element egal cu unu, apărut anterior, s-a adunat boolean la coloana V_1', coloana x_5, ceea ce a adus un nou element egal cu unu, în dreptul liniei x_1 (în dreptul liniei x_2 exista element egal cu unu, deci aci nu se modifică nimic),

— adunarea booleană a coloanei x_1, la coloana V_1', nu mai aduce modificări, ceea ce înseamnă că procesul descris mai sus a luat sfîrșit,

— locurile rămase libere au fost completate cu zerouri.

Scanned with OKEN Scanner

Coloana V_1', calculată cu ajutorul operațiilor descrise mai sus, este egală cu prima coloană a matricei drumurilor, ceea ce justifică afirmația că elementele egale cu unu, de pe ea, indică vîrfurile ce ating pe x_1. Într-adevăr, dacă în graful G s-ar schimba sensurile tuturor arcelor, s-ar obține un alt graf G', a cărui matrice a arcelor este transpusă matricei A din tabelul III.1.8. Datorită schimbării sensurilor, de pe arcele arborelui G, vîrfurile atinse de la x_1, în graful G', vor fi chiar vîrfurile ce ating pe x_1, în graful G, deci acestea se determină calculînd prima linie a matricei drumurilor grafului G' (cu operațiile cunoscute, dar aplicate pe transpusa matricei A).

Din cele de mai sus, rezultă că $V_1' = \{x_1, x_2, x_5\}$ și prin urmare:

$$M(x_1) = (V_1 \cap V_1') \cup \{x_1\} = \{x_1, x_2, x_5\} \cup \{x_1\} = \{x_1, x_2, x_5\}.$$

Componenta $C(x_1)$, pe care o vom nota pe scurt cu C_1 (prima componentă tare conexă găsită), este reprezentată în figura III.1.15. Această componentă a fost construită astfel:

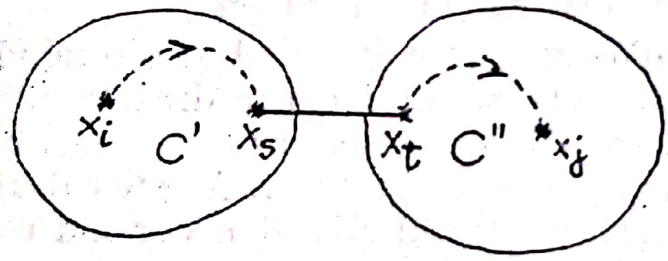


Fig. III.1.16

— vîrfurile ei sînt x_1, x_2 și x_5, cele ce formează mulțimea $M(x_1)$,

— arcele ei sînt toate arcele grafului G, ce au ambele extremități în mulțimea $M(x_1)$.

Pentru a determina următoarea componentă tare conexă a grafului G, vom repeta procedeul pe subgraful lui G, cu vîrfurile rămase în discuție, adică cu mulțimea de vîrfuri: $X - M(x_1) = \{x_3, x_4, x_6\}$. Acest lucru se poate realiza pe același tabel, al matricei arcelor grafului G, adăugînd linia suplimentară V_2 și coloana suplimentară V_2' (pentru găsirea celei de a doua componente, pe care o vom nota cu C_2), din tabel fiind suprimate liniile și coloanele corespunzătoare vîrfurilor x_1, x_2 și x_5. Se ajunge astfel la tabelul III.1.9, se preia calculele din vechiul tabel III.1.8 și le prelungește în

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul III.19.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	V'_1	V'_2	V'_3
x_1	0	0	0	0	1	1	1	///////	///////
x_2	1	0	1	0	1	0	1	///////	///////
x_3	0	0	0	1	0	0	0	/// 0	///////
x_4	0	0	0	0	0	1	0	0	/// 1
x_5	0	1	0	1	0	1	1	///////	///////
x_6	0	0	0	1	0	0	0	0	1
V_1	1	1	1	1	1	1	—	—	—
V_2	//////////	//////////	0	1	/////	1	—	—	—
V_3	//////////	//////////	//////////	1	/////	1	—	—	—

sensul indicat. Pentru a nu strica claritatea tabelului, nu au fost șterse efectiv liniile și coloanele x_1, x_2 și x_5, ci pe linia V_2 și coloana V'_2 au fost hașurate locurile corespunzătoare lor. Pentru calculul liniei V_2 și al coloanei V'_2, s-a pornit cu vîrful x_3 al grafului G(x_1 și x_2 au intrat în componenta C_1). Astfel, pentru linia V_2, s-au făcut următoarele calcule:

— linia x_3 a adus un singur element egal cu unu, în dreptul coloanei x_4,

— adunarea booleană a liniei x_4 a adus un nou element egal cu unu, în dreptul coloanei x_6,

— adunarea booleană a liniei x_6 nu a mai adus nici o modificare, locul rămas liber completîndu-se cu un zero.

Observație. Dacă prin adunarea booleană a unei linii ar trebui să fie adus un element egal cu unu pe un loc hașurat, nu ținem seama de el, coloana corespunzătoare din tabel fiind presupusă suprimată.

Din calculele efectuate, rezultă că: $V_2 = \{x_4, x_6\}$. Pe de altă parte, pentru calculul coloanei V_2, de la început coloana x_3 nu aduce nici un element egal cu unu (cel din dreptul liniei x_2 cade într-o regiune hașurată), deci locurile libere se completează cu zerouri și $V'_2 = 0$. Aplicînd o formulă asemănătoare cu formula (i), avem:

$$\text{(ii)}\quad M(x_3) = (V_2 \cap V'_2) \cup \{x_3\} = \{x_3\}.$$

În consecință, C_2, cea de a doua componentă tare conexă a grafului G este formată dintr-un singur vîrf, x_3. În tabelul III.1.9 este calculată și cea de a treia componentă tare conexă

a lui G, prin eliminarea liniei și coloanei x_3 (pe lîngă cele eliminate anterior). Această componentă, notată cu C_3, are următoarea mulțime de vîrfuri:

(iii) $M(x_4) = (V_3 \cap V'_3) \cup \{x_4\} = \{x_4, x_6\}$.

Observație. Într-un graf fără circuite, toate componentele tare conexe sînt formate din cîte un singur vîrf.

Calculul matricei arcelor grafului condensat. Să considerăm că graful G are k componente tare conexe, $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Matricea A^*, a grafului condensat G^*, este o matrice pătrată de ordinul k, ale cărei linii și coloane corespund la componentele $C_1, C_2, \ldots, C_k$, considerate ca vîrfuri. Această matrice se deduce din matricea A, a arcelor grafului G, conform următoarelor proprietăți ușor de dedus (cititorul le poate intui sau justifica imediat):

— linia C_s, $s = 1, 2, \ldots, k$, din matricea A^*, este suma booleană a liniilor din A, ce corespund la vîrfurile ce intră în componența componentei tare conexe C_s,

— coloana C_t, $t = 1, 2, \ldots, k$, din matricea A^*, este suma booleană a coloanelor din A, ce corespund la vîrfurile ce intră în componența componentei tare conexe C_t,

— matricea A^* are în mod obligatoriu toate elementele de pe diagonala principală egale cu zero (dacă apare vreun element egal cu unu, pe această diagonală, el se înlocuiește cu unu).

Evident, în calculul practic al matricei A^*, matricea A se condensează — în modul indicat — mai întîi pe linii, apoi pe coloane (sau invers). Exemplul ce urmează va lămuri complet cele descrise mai sus.

Exemplu. Pentru graful din figura III.1.15, a cărui matrice a arcelor este cea din tabelul III.1.8 și ale cărui componente au fost calculate în exemplul precedent, calculul matricei A se face în trei etape, după cum urmează. Mai întîi, se calculează matricea dreptunghiulară $\tilde{A}$, din tabelul III.1.10, ale cărei linii corespund la componentele tare conexe C_1, C_2 și

Tabelul III.1.10

$(\tilde{A})$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
C_1	1	0	1	1	6	1
C_2	0	0	0	1	0	0
C_3	0	0	0	0	1	1

Scanned with OKEN Scanner

C_3, iar ale cărei coloane corespund la vîrfurile grafului G. Linia C_1 a fost calculată ca suma booleană a liniilor x_1, x_2 și x_5 din matricea A (x_1, x_2 și x_5 fiind vîrfurile ce intră în componenta C_1). Linia C_2 coincide cu linia x_3 din matricea A, x_3 fiind singurul vîrf din componenta C_2. În sfîrșit, linia C_3 a fost calculată ca suma booleană a liniilor x_4 și x_6 din matricea A.

În cea de a doua etapă, se procedează asemănător pe coloane, dar asupra matricei $\widetilde{A}$, ceea ce conduce la matricea $\widetilde{\widetilde{A}}$, din tabelul III.1.11, de data aceasta o matrice pătrată, ale cărei linii și coloane corespund la componentele C_1, C_2 și C_3.

Tabelul III.1.11

$(\widetilde{\widetilde{A}})$

	C_1	C_2	C_3
C_1	1	1	1
C_2	0	0	1
C_3	0	0	1

Astfel, coloana C_1 din matricea $\widetilde{\widetilde{A}}$ este suma booleană a coloanelor x_1, x_2 și x_5 din matricea $\widetilde{A}$, coloana C_2 din $\widetilde{\widetilde{A}}$ coincide cu coloana x_3 a matricei $\widetilde{A}$, iar coloana C_3 din $\widetilde{\widetilde{A}}$ este suma booleană a coloanelor x_4 și x_6 din $\widetilde{A}$.

În final, cea de a treia etapă constă în înlocuirea celor două elemente egale cu unu, de pe diagonala principală a matricei $\widetilde{\widetilde{A}}$, prin zero, ceea ce conduce la matricea arcelor grafului condensat G, din tabelul III.1.12.

Tabelu III.1.12

(A^*)

	C_1	C_2	C_3
C_1	0	1	1
C_2	0	0	1
C_3	0	0	0

Încheiem prezentarea noțiunilor generale despre grafuri, cu o proprietate a grafului condensat.

Teorema III.1.3. Graful condensat, corespunzător unui graf orientat oarecare, este un graf fără circuite.

Scanned with OKEN Scanner

Justificarea acestei proprietăți rezultă din următoarea observație simplă: dacă în G^*, există arcul (C', C''), atunci în G există drum de la orice vîrf $x_i \in C'$, spre orice vîrf $x_j \in C''$. Într-adevăr, există în G^*, a arcului (C', C''), arată, conform definiției grafului condensat, că G conține un arc (x_s, x_t), cu x_s în componenta C' și x_t în componenta C''. Dar în C' și C'' existînd legături prin drumuri între orice vîrfuri interne lor, există drumuri de forma $d(x_i, x_s)$ și $d(x_t, x_j)$, care se pot lega între ele prin intermediul arcului (x_s, x_t), conducînd la un drum $d(x_i, x_j)$. Cititorul poate urmări mai ușor acest raționament, folosind figura III.1.16.

Conform observației de mai sus, existența unui circuit în graful condensat ar însemna că două vîrfuri, x_i și x_j, ce fac parte din două vîrfuri distincte ale lui G^*, de pe acel circuit, sînt mutual atinse, ceea ce nu se poate (cele două componente, presupuse vîrfuri distincte ale lui G^*, s-ar contopi într-una singură).

Probleme rezolvate

1. Cele cinci puncte de lucru importante dintr-o secție sînt legate printr-un sistem de benzi transportoare. Asociem situației din secție un model-graf $G = (X, \gamma)$, în care vîrfurile x_1, x_2, x_3, x_4 și x_5 reprezintă cele cinci puncte de lucru, iar arcul $(x_i, x_j) \in \gamma$ reprezintă banda transportoare care duce piesele din x_i către x_j. Fie G graful din figura III.1.17. Să

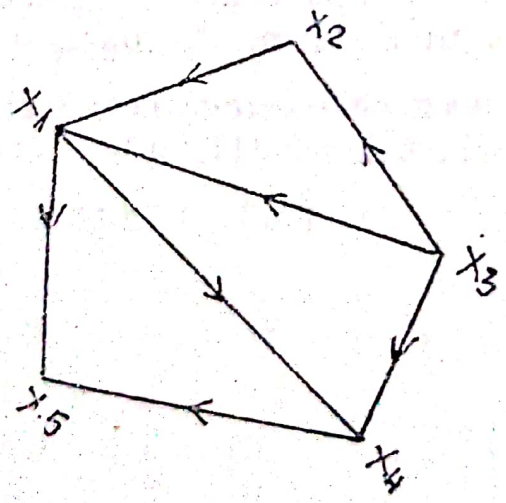


Fig. III.1.17

se analizeze situația din secție cu ajutorul matricei arcelor A, indicînd cum poate fi folosi un astfel de sistem de benzi, pentru un proces de fabricație ce trece prin toate cele cinci puncte.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Matricea arcelor grafului G este prezentată în tabelul III.1.13. La această matrice s-au atașat o linie și o coloană suplimentare, în care s-au calculat respectiv sumele pe coloane și sumele pe linii. În partea dreaptă a matricei,

Tabelul III.1.13

(A)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	g_i^+
x_1	0	0	0	1	1	2
x_2	1	0	0	0	0	1
x_3	1	6	0	1	0	3
x_4	0	0	0	0	6	1
x_5	0	0	0	0	0	0
g_i^-	2	1	0	2	2	—

se găsesc deci gradele exterioare de incidență ale vîrfurilor, iar în partea de jos a aceleiași matrice se găsesc interioare ale acestor vîrfuri. Se observă că gradul interior de incidență a vîrfului x_3 este nul ($g_3^- = 0$), ceea ce înseamnă că procesul de fabricație trebuie să pornească din punctul de lucru x_3, (aci nu sosește nici o bandă transportoare). Pe de altă parte, gradul exterior de incidență a vîrfului x_5 este nul ($g_5^+ = 0$) ceea ce înseamnă că procesul de fabricație trebuie să se termine în punctul de lucru x_5. În plus, prin observații directe, se poate găsi că procesul de fabricație trebuie să străbată succesiv punctele x_3, x_2, x_1, x_4, x_5.

2. Un anumit produs poate fi fabricat într-o secție a unei întreprinderi, prin mai multe procedee tehnologice, folosind unele materii prime și trecînd prin diverse tipuri de produse intermediare (semifabricate). Fie $F = (X, \gamma)$ un graf, în care $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_8\}$ este mulțimea materiilor prime ce se pot folosi și a produselor intermediare respective (numite împreună mai scurt stări de prelucrare), iar γ mulțimea posibilităților de trecere de la o stare de prelucrare la alta. Mai precis, $(x_i, x_j) \in \gamma$, dacă starea de prelucrare x_i (eventual împreună cu alte stări din mulțimea X) poate conduce, printr-o operație de prelucrări, la starea x_j. Fie graful G, cel din figura III.1.18.

a) Să se cerceteze posibilitățile de trecere între diferitele stări de prelucrare indicate în problemă.

b) Să se arate la ce stări de prelucrare se poate ajunge, pornind de la fiecare dintre stările de prelucrare presupuse în problemă.

Scanned with OKEN Scanner

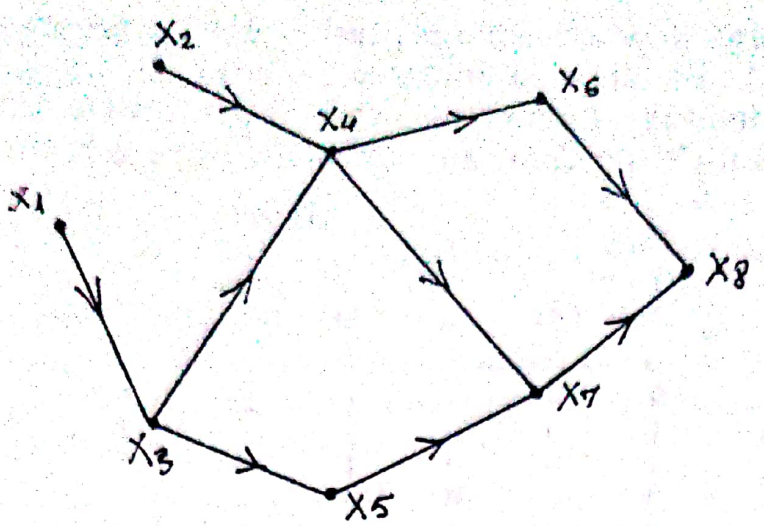


Fig. III.1.18

c) x_8 fiind starea finală (produsul finit), să se arate de la ce stări se poate ajunge la aceasta, conform condițiilor date de problemă.

Rezolvare. a) Matricea arcelor grafului G este calculată în tabelul III.1.14.

Tabelul III.1.14

(A)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	0	1	0	0	0	0	0
x_2	0	0	0	1	0	0	0	0
x_3	0	0	0	1	1	0	0	0
x_4	0	0	0	0	0	1	1	0
x_5	0	0	0	0	0	0	1	0
x_6	0	0	0	0	0	0	0	6
x_7	0	0	0	0	0	0	0	1
x_8	0	0	0	0	0	0	0	0

Pornind de la această matrice și prin aplicarea metodei descrise în acest paragraf, s-a calculat matricea drumurilor din tabelul III.1.15. Ea arată toate posibilitățile de trecere, între diferitele stări de prelucrare, indicate în problemă. Astfel, dacă elementul d_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, 8$; $j = 1, 2, \ldots, 8$, este egal cu unu, atunci există cel puțin o posibilitate de trecere de la starea x_i la starea x_j. În caz contrar, dacă $d_{ij} = 0$, nu se poate trece de la starea x_i la starea x_j. Astfel, de pildă, deoarece $d_{38} = 1$, există posibilitatea trecerii de la starea x_3 la starea x_8. Prin observații directe, cititorul poate găsi următoarele trei drumuri de la x_3 la x_8; $d_1 = (x_3, x_5, x_7, x_8)$, $d_2 = (x_3, x_4, x_6, x_8)$, $d_3 = (x_3, x_4, x_7, x_8)$.

Tabelul III.1.15

(D)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	p_i
x_1	0	0	1	1	1	1	1	1	6
x_2	0	0	0	1	0	1	0	1	4
x_3	0	0	0	1	1	1	1	1	5
x_4	0	0	0	0	0	1	1	1	3
x_5	0	0	0	0	0	0	0	1	2
x_6	0	0	0	0	0	0	0	1	1
x_7	0	0	0	0	0	0	0	1	1
x_8	0	0	0	0	0	0	0	0	0

b) Elementele egale cu unu, din matricea D, ce se află pe o linie x_i, arată la ce stări se poate ajunge, pornind de la starea x_i. În plus, puterile de atingere, calculate în partea dreaptă a matricei D, ca sume ale elementelor de pe liniile respective, arată la cîte stări se poate ajunge, pornind de la fiecare stare în parte.

c) Elementele egale cu unu, de pe coloana x_8 a matricei drumurilor, arată de la ce stări se poate ajunge la starea finală x_8. După cum se observă din tabelul III.1.15, la starea finală se poate ajunge de la orice stare de prelucrare, menționată în problemă.

3. Șapte puncte de lucru ale unei secții, ce folosesc curent electric alternativ, pot fi alimentate prin racordarea la rețea, folosind unele din legăturile posibile, reprezentate prin muchii în graful neorientat G, din figura III.1.19. Să se determine una dintre posibilitățile de legare a punctelor de lucru, astfel încît toate să poată funcționa și nefolosind

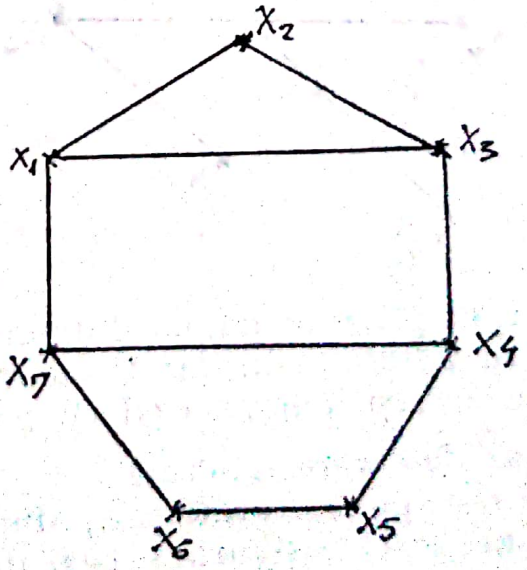


Fig. III.1.19

legături de prisos. În condițiile puse de problemă, există tipuri de legare a punctelor de lucru, care să folosească mai puține sau mai multe legături între perechile de puncte?

Rezolvare. Trebuie construit un arbore-acoperire al grafului G. Pentru aceasta, vom considera toate cele șapte vîrfuri, x_1, x_2, ..., x_7, drept vîrfuri ale arborelui căutat, dar dintre muchii selectăm numai $n - 1 = 7 - 1 = 6$, muchii, ca în exemplul ce urmează.

Să pornim, de pildă, cu muchia $[x_1, x_2]$. Următoarea muchie, pe care o solicităm, va avea una din extremități în x_1 sau în x_2 (pentru conexiune): fie să selectăm pe $[x_2, x_3]$. La a treia selecție, vom evita alegerea muchiei $[x_1, x_3]$, care ar închide un ciclu; să alegem, spre exemplu, muchia $[x_3, x_4]$.

Evitînd, de fiecare dată, alegerea unei muchii ce închide un ciclu, să presupunem că au fost alese succesiv următoarele muchii, de la a patra selecție în sus: $[x_4, x_5]$, $[x_3, x_6]$, $[x_4, x_7]$. Se observă că, la subgraful obținut, nu se mai poate adăuga nici o muchie, fără să se închidă un ciclu, deci că s-a obținut un arbore-acoperire (vezi figura III.1.20). Aceasta este una dintre soluțiile posibile ale problemei. În practică, alegerea diferitelor muchii ce se adaugă, se face conform unor criterii economice, ce vor fi prezentate.

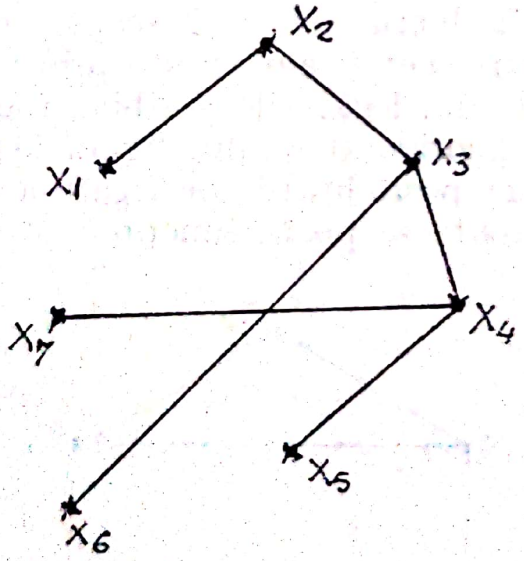


Fig. III.1.20

În ceea ce privește numărul de muchii, ce trebuie selectate, pentru a forma un arbore-acoperire al lui G, acesta este mereu același, anume egal cu $n - 1 = 6$.

Probleme date spre rezolvare

4. Cele opt puncte principale, din regiunea unei gări a unei stațiuni (hotel, restaurant, baze de tratament etc.), sînt

legate printr-un sistem de străzi cu sensuri unice, ca în figura III.1.21. Este evident că o astfel de rețea de comunicație trebuie să permită deplasarea unui autoturism între oricare două puncte dintre cele opt, precizate mai sus.

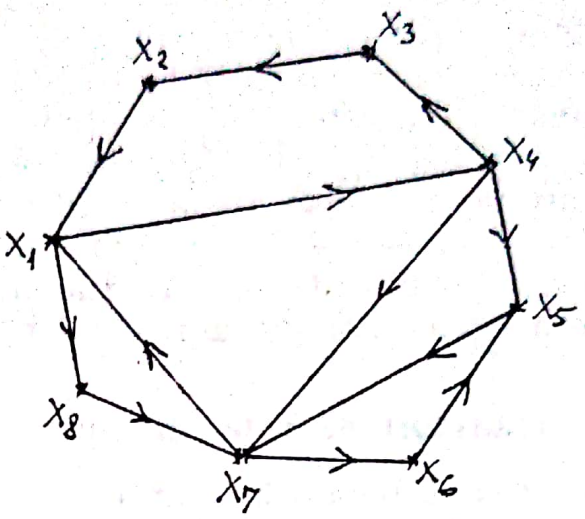


Fig. III.1.21

Să se cerceteze dacă alegerea sensurilor pe străzi este bine aleasă, adică dacă se îndeplinește condiția menționată.

Răspuns. Matricea drumurilor grafului din figura III.1.21 are toate elementele egale cu unu, ceea ce înseamnă că acest graf este tare conex, permițînd deplasarea între oricare două puncte ale sistemului.

5. Fie graful G, din figura III.1.22, care reprezintă un sistem de căi de transport intern dintr-o întreprindece, ce leagă șapte puncte principale ale întreprinderii. Să se cerceteze dacă acest sistem poate permite legătura între oricare două dintre cele șapte puncte. În caz contrar, să se precizeze care sînt submulțimile de puncte ce îndeplinesc separat

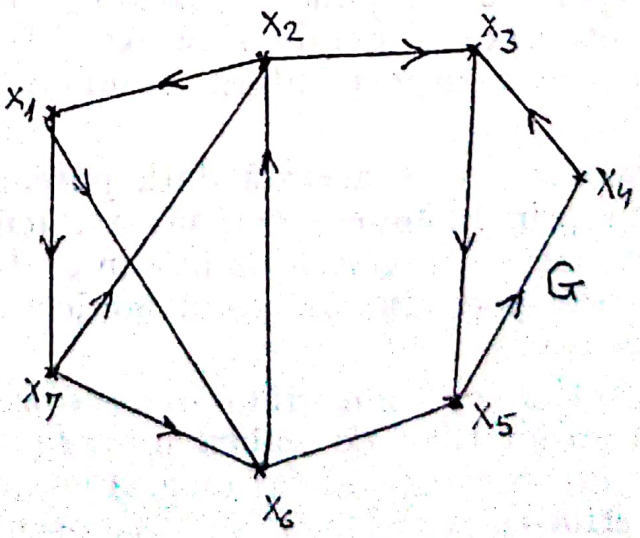


Fig. III.1.22

această condiție și ce cale de acces ar putea fi adăugată, în așa fel încît tot sistemul să îndeplinească condiția menționată.

Răspuns. Matricea drumurilor grafului G nu are toate elementele egale cu unu, deci sistemul nu poate permite deplasarea între oricare două puncte. Există două subgrafe maximale ce verifică condiția impusă, anume cele două componente tare conexe ale grafului G. Submulțimile de vîrfuri, corespunzătoare acestor două componente tare conexe sînt: $M_1 = \{x_1, x_2, x_6, x_7\}$ și $M_2 = \{x_3, x_4, x_5\}$. Graful G ar deveni tare conex, dacă i s-ar adăuga un arc oarecare, cu extremitatea inițială — într-un vîrf din mulțimea M_2 și extremitatea finală într-un vîrf din mulțimea M_1 (fapt ce rezultă din cercetarea grafului condensat G^*).

III.2. **Transport pe rute minime**

În practica economică apar multe probleme ce se pot rezolva folosind modele grafuri în care urmează să determinăm anumite drumuri de valori minime (sau maxime). În acest sens, dăm, în cele ce urmează, un exemplu.

Să presupunem că pentru transportul unui produs, între două localități, se poate utiliza o rețea de șosele, în cadrul căreia există mai multe posibilități de alegere a rutei pe care urmează să se efectueze acest transport. Rețeaua în cauză este reprezentată printr-un graf ponderat, ale cărui vîrfuri sînt localități intermediare prin care se poate trece, iar ale cărui arce (muchii) sînt șoselele ce leagă localitățile respective. Ponderile (valorile) de pe arce pot reprezenta costurile unitare de transport de-a lungul acestor șosele sau alți indicatori legați de folosirea șoselelor. Evident, probleme asemănătoare de transport se pot pune și rezolva în cadrul unor sisteme de dimensiuni mai mici, ca spre exemplu în rezolvarea unor probleme de transport intern al unei întreprinderi, secții etc.

Observație. Și de această dată putem avea situații cînd rezolvăm prin metode asemănătoare (cu ajutorul determinării drumurilor de valori minime în grafuri) probleme ce nu sînt de transport, dar ale căror modele matematice coincid cu ale acestora.

În continuare, vom arăta în ce constă problema determinarea drumurilor de valori minime (respectiv maxime) într-un graf. Astfel, fiind dat un graf capacitat, $G = (X, \gamma, v)$, avînd vîrfurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$, să considerăm două vîrfuri

fixate ale sale, de exemplu x_1 și x_n (x_1 este localitatea de plecare, iar x_n este localitatea de destinație a transportului). Graful G conține mai multe drumuri de la x_1 la x_n (cazul cînd există un singur drum de acest fel este banal). Să notăm aceste drumuri prin: $d_1(x_1, x_n)$, $d_2(x_1, x_n)$, $d_3(x_1, x_n)$, ..., $d_k(x_1, x_n)$. Fiecărui drum, dintre acestea, îi corespunde cîte o valoare, egală cu suma valorilor arcelor ce îl compun (conform definiției date în paragraful precedent). Problema cercetată cere ca, dintre drumurile menționate, să ne oprim la acela (sau acelea) cu valoarea cea mai mică. Notînd un astfel de drum prin $d_s(x_1, x_n)$, putem scrie deci definiția lui astfel:

$$v[d_s(x_1, x_n)] = \min_{i=1, 2, \ldots, k} \{v[d_i(x_1, x_n)]\}.$$

Analog, dintre cele k drumuri de la x_1 la x_n, unul (sau mai multe) are valoarea cea mai mare. Notînd un drum de valoare maximă de la x_1 la x_n, prin $d_t(x_1, x_n)$, definiția lui poate fi scrisă astfel:

$$v[d_t(x_1, x_n) = \max_{i=1, 2, \ldots, k} \{v[d_i(x_1, x_n)]\}.$$

Notații importante. Vom nota, prin convenție, valoarea minimă a drumurilor de la x_1 la x_n, cu m_{1n}, iar valoarea maximă a cestor drumuri cu M_{1n}. În general, considerînd două vîrfuri oarecare ale grafului, $x_i \in X$ și $x_j \in X$, convenim să notăm:

m_{ij} = valoarea minimă a drumurilor de la x_i la x_j,
M_{ij} = valoarea maximă a drumurilor de la x_i la x_j.

Observație. Uneori, vom mai numi valoarea minimă (maximă) a drumurilor dintre x_i și x_j, distanța minimă (maximă) între cele două vîrfuri.

Exemplu. Fie graful ponderat din figura III.2.1, valorile arcelor fiind scrise pe arce. Ne propunem să găsim, prin enumerare (cercetarea directă a tuturor posibilităților), dru-

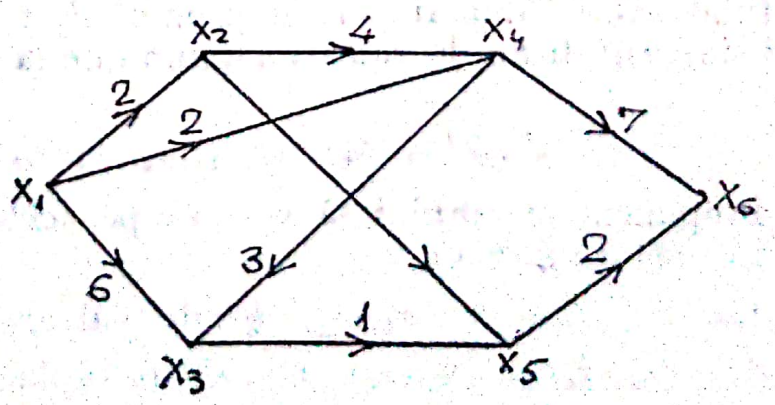


Fig. III.2.1.

mul (drumurile) de valoare minimă, respectiv maximă, între vîrfurile x_1 și x_6. Cititorul poate observa cu ușurință, cercetînd graful din figura III.2.1, că există în acest graf șase drumuri de la x_1 la x_6 și anume următoarele:

$d_1(x_1, x_6) = (x_1, x_2, x_4, x_6)$; $d_2(x_1, x_6) = (x_1, x_2, x_4, x_3, x_5, x_6)$;
$d_3(x_1, x_6) = (x_1, x_2, x_5, x_6)$; $d_4(x_1, x_6) = (x_1, x_3, x_5, x_6)$;
$d_5(x_1, x_6) = (x_1, x_4, x_6)$; $d_6(x_1, x_6) = (x_1, x_4, x_3, x_5, x_6)$.

Valorile acestor șase drumuri se calculează după cum urmează:

$$v[d_1(x_1, x_6)] = v(x_1, x_2) + v(x_2, x_4) + v(x_4, x_6) = 2 + 4 + 7 = 13,$$
$$v[d_2(x_1, x_6)] = v(x_1, x_2) + v(x_2, x_4) + v(x_4, x_3) + v(x_2, x_5) + v(x_5, x_6) = 2 + 4 + 3 + 1 + 2 = 12,$$
$$v[d_3(x_1, x_6)] = v(x_1, x_2) + v(x_2, x_5) + v(x_5, x_6) = 2 + 4 + 2 = 8,$$
$$v[d_4(x_1, x_6)] = v(x_1, x_3) + v(x_3, x_5) + v(x_5, x_6) = 6 + 1 + 2 = 9,$$
$$v[d_5(x_1, x_6)] = v(x_1, x_4) + v(x_4, x_6) = 2 + 7 = 9,$$
$$v[d_6(x_1, x_6)] = v(x_1, x_4) + v(x_4, x_3) + v(x_3, x_5) + v(x_5, x_6) = 2 + 3 + 1 + 2 = 8.$$

Valoarea minimă a drumurilor de la x_1 la x_6 este deci:

$$m_{16} = \min \{13;\ 12;\ 8;\ 9;\ 9;\ 8] = 8,$$

această valoare fiind atinsă pentru două drumuri dintre cele șase. Există deci două drumuri de valoare minimă (ambele cu valoarea egală cu opt) și anume $d_3(x_1, x_6)$ și $d_6(x_1, x_6)$. Dacă nu am fi scris și numerotat toate drumurile de la x_1 la x_6, aceste două drumuri ar fi putut fi scrise — prin convenție — astfel:

$d'_{min}(x_1, x_6) = (x_1, x_2, x_5, x_6)$; $d''_{min}(x_1, x_6) = (x_1, x_4, x_3, x_5, x_6)$.

Analog, valoarea maximă a drumurilor de la x_1 la x_6 este:

$$M_{16} = \max \{13;\ 12;\ 8;\ 9;\ 9;\ 8\} = 13,$$

ea fiind atinsă numai pentru drumul $d_1(x_1, x_6)$, care este deci singurul drum de valoare maximă de la x_1 la x_6. Putem scrie:

$$d_{max}(x_1, x_6) = (x_1, x_2, x_4, x_6)$$

Propunem cititorului să verifice pe același exemplu tot prin cercetare directă, că:

$d_{min}(x_4, x_6) = (x_4, x_3, x_5, x_6)$, de valoare egală cu șase

$d_{max}(x_4, x_6) = (x_4, x_6)$, de valoare egală cu șapte.

Denumire importantă. Drumurile de valoare minimă (respectiv maximă) dintr-un graf vor fi denumite pe scurt *drumuri minime* (respectiv *maxime*) în graf. Se mai folosește o denumire unitară, de *drumuri optime*, natura optimului (maxim sau minim) rezultînd din contextul economic al problemei rezolvate. În același sens, vom folosi și expresia de *valoare optima a drumurilor* dintre două vîrfuri ale unui graf.

Atenție! Cititorul trebuie să facă distincție între două noțiuni și anume:

— valoare optimă a drumurilor dintre două vîrfuri ale unui graf, care este un număr;

— drumul (drumurile) de valoare optimă între cele două vîrfuri, care reprezintă succesiunea (succesiunile) corespunzătoare de vîrfuri.

În sensul acestor două aspecte ale problemei, va trebui să dăm metode de rezolvare pentru fiecare în parte.

Înainte de a începe rezolvarea problemelor puse, vom accentua asupra a două proprietăți importante, pe care le prezentăm sub forma a două observații, ținînd seama de faptul că cele mai multe dintre grafurile capacitate cu care lucrăm au valori pozitive și finite pe arce.

Prima proprietate este aceea că, într-un graf cu valori finite și pozitive pe arce, există drumuri de valori minime finite între oricare două vîrfuri ale grafului, ce sînt legate prin cel puțin un drum. În plus, orice drum de valoare minimă între două vîrfuri, ale unui astfel de graf, este elementar.

Prima parte a acestei proprietăți este evidentă, din moment ce între cele două vîrfuri există cel puțin un drum, a cărui valoare este sigur finită și pozitivă. Partea a doua a afirmației făcute va fi justificată pe baza unui exemplu simplificat și anume asupra grafului cu circuite din figura III.2.2, (pe un graf fără circuite afirmația este evidentă, în astfel de grafuri existînd numai drumuri elementare). Astfel, fie drumul neelementar $d_1(x_1, x_5) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_2, x_5)$, de

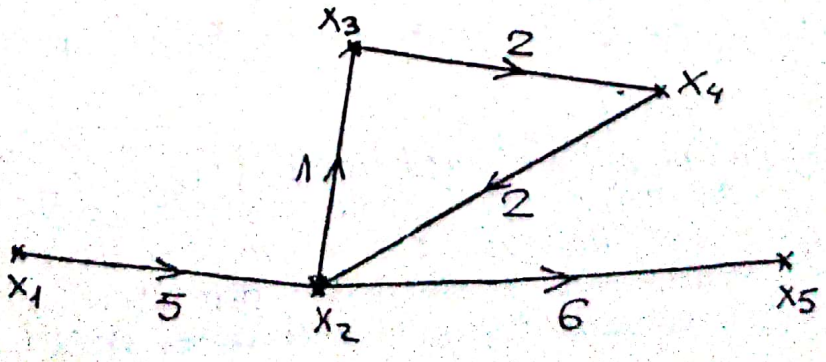


Fig. III.2.2

valoare egală cu 16; el este neelementar, trecînd de două ori prin vîrful x_2. Se observă cu ușurință că un astfel de drum (neelementar) trebuie să conțină un subdrum (o parte din drum), sub forma unui circuit, în cazul nostru (x_2, x_3, x_4, x_2). Eliminînd din drumul $d_1(x_1, x_5)$ circuitul menționat se obține cu ușurință un alt drum de la x_1 la x_5, drum de forma $d_2(x_1, x_5) = (x_1, x_2, x_5)$, a cărui valoare este mai mică decît valoarea lui $d_1(x_1, x_5)$, cu cinci unități (valoarea circuitului eliminat din drumul inițial). Modificările indicate ajută cu atît mai mult cînd drumul de la care se pornește trece de mai multe ori printr-un vîrf, caz în care repetăm de cîte ori se poate eliminarea unui circuit din drumul respectiv. Raționamentul descris ne convinge că un drum neelementar nu poate avea valoare minimă, existînd totdeauna un alt drum, de valoare mai mică decît el, între aceleași vîrfuri ale grafului.

Reținem, din justificarea făcută mai sus, o proprietate mai generală, ce rezultă cu ușurință și anume că:

> *orice metodă de căutare a drumurilor de valori minime, între vîrfurile unui graf cu circuite, evită de la sine introducerea în aceste drumuri a circuitelor cu valori pozitive.*

Cea de a doua proprietate, asupra căreia vrem să accentuăm, se referă, de asemenea, la grafele cu circuite, în care există circuite cu valori pozitive: într-un astfel de graf, există vîrfuri între care putem obține drumuri cu valori oricît de mari. În acest sens, problema determinării drumurilor de valoare maximă, între vîrfurile respective, își pierde sensul. Dăm ca exemplu graful din figura III.2.2, ce conține circuitul (x_2, x_3, x_4, x_2), de valoare egală cu cinci unități și în care putem scrie următorul șir de drumuri de la x_1 la x_5, cu valori din ce în ce mai mari:

$d_1(x_1, x_5) = (x_1, x_2, x_5)$, de valoare egală cu 11,
$d_2(x_1, x_5) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_2, x_5)$, de valoare egală cu 16,
$d_3(x_1, x_5) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_2, x_3, x_4, x_2, x_5)$, de valoare egală cu 21,
.....

Este clar că putem repeta circuitul (x_2, x_3, x_4, x_2), în drumul cerut, de cîte ori este nevoie, pentru a obține un drum de valoare oricît de mare; acesta este echivalent cu a spune că, deși vîrfurile x_1 și x_5 sînt legate prin drumuri, nu există un drum cu valoarea maximă între aceste vîrfuri.

Reținem, din cele de mai sus, că într-un graf cu circuite pozitive nu are rost să căutăm drumurile de valori maxime între diferitele vîrfuri ale grafului.

Observație. Dacă valorile atașate arcelor grafului pot fi și negative, probleme analoage se pot pune în cazul cînd graful conține circuite de valori negative, dar cu următoarele rezultate:

— drumurile de valori maxime, între diferitele vîrfuri ale grafului, există întotdeauna (evident dacă vîrfurile respective sînt legate prin drumuri și nu există circuite cu valori pozitive); aceste drumuri de valori maxime evită includerea în ele a circuitelor negative, fiind deci elementare,

— drumurile de valori minime nu există pentru anumite perechi de vîrfuri, deși vîrfurile respective sînt legate prin drumuri, adică problema pusă își pierde sensul (există drumuri cu valori oricît de mici, evident negative).

În paragraful de față, ne vom referi numai la grafuri ponderate, ale căror valori de pe arce sînt pozitive. De asemenea, vom trata numai cazul drumurilor cu valori minime, indicînd de fiecare dată cum se adaptează metodele descrise, în situația cînd se cer drumurile cu valori maxime.

Problemele practice, care conduc la modelele-grafuri pe care le folosim, pot duce la două tipuri de probleme de determinare a drumurilor cu valori minime, dintre care, prima reprezintă un caz particular al celeilalte și anume:

(i) Determinarea valorii minime, respectiv a drumului (drumurilor) cu valoarea minimă, între două vîrfuri fixate ale grafului.

(ii) Determinarea valorilor minime, respectiv a drumurilor cu valori minime, între *oricare* două vîrfuri ale grafului.

Rezolvarea uneia, sau celeilalte probleme, dintre cele două de mai sus, depinde evident de problema practică ce se rezolvă, de rezultatele ce se cer. Evident, problema (i) se va rezolva cu calcule mai puține, dar problema (ii) dă rezultate mai cuprinzătoare.

În ceea ce privește rezolvarea problemei (ii), ea se realizează cu ajutorul unei matrici pătrate de ordinul n (n = numărul vîrfurilor din graf), pe care o notăm de obicei cu M și o numim *matricea valorilor minime* ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale grafului. Mai precis, notînd cu m_{ij}

elementul matricei M, ce se află la intersecția liniei x_i cu valoarea x_j, avem:

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } i = j \text{ (pentru elementele de pe diagonala principală)} \\ \infty, \text{ dacă } i \neq j \text{ și nu există nici un drum în graf, de la } x_i \text{ la } x_j, \\ \text{valoarea minimă a drumurilor de la } x_i \text{ la } x_j, \text{ dacă există astfel de drumuri.} \end{cases}$$

Reținem! Pentru elementul m_{ij}, linia în care se găsește el arată plecările de drumuri minime, iar coloana arată sosirile acestor drumuri minime.

Pentru problema analoagă, a determinării matricei valorilor maxime ale drumurilor din graf, vom nota cu M această matrice, iar cu M_{ij} elementul de pe linia x_i și de pe coloana x_j a acestei matrice, definit astfel:

$$M_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } i = j, \\ -\infty, \text{ dacă nu există nici un drum în graf, de la } x_i \text{ la } x_j, \\ \text{valoarea maximă a drumurilor de la } x_i \text{ la } x_j, \text{ în restul cazurilor.} \end{cases}$$

Metodele de rezolvare a problemelor (i) și (ii) folosesc așa-numita *matrice a valorilor*, notată cu V. Această matrice este o matrice pătrată de ordinul n, al cărei element v_{ij}, de pe linia x_i și de pe coloana x_j, se definește astfel:

$$v_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } i = j \text{ (pentru elementele de pe diagonala principală),} \\ \pm\infty, \text{ dacă } i \neq j \text{ și nu există arcul } (x_i, x_j) \text{ în graf,} \\ v(x_i, x_j), \text{ dacă graful conține arcul } (x_i, x_j). \end{cases}$$

Precizare! În cazul cînd $i \neq j$ și graful nu conține arcul (x_i, x_j), se pune $v_{ij} = \infty$, în cazul problemei de drumuri minime și $v_{ij} = -\infty$, în cazul problemei de drumuri maxime.

Observație. Pentru cazul unui graf neorientat, notațiile de mai sus rămîn valabile, dar transformînd mai întîi acest graf într-unul orientat, prin înlocuirea fiecărei muchii $[x_i, x_j]$ cu două arce de sens contrar, (x_i, x_j) și (x_j, x_i), cu aceeași valoare (egală cu valoarea muchiei corespunzătoare).

Scanned with OKEN Scanner

Exemple. 1. Fie graful orientat G, din figura III.2.3, valorile arcelor fiind scrise pe arce. Matricea valorilor acestui graf, scrisă în scopul rezolvării problemei de drumuri minime, este cea din tabelul III.2.1. Se observă că toate elementele de pe diagonala principală sînt egale cu zero, în locurile corespunzătoare arcelor existente în graf se găsesc valorile

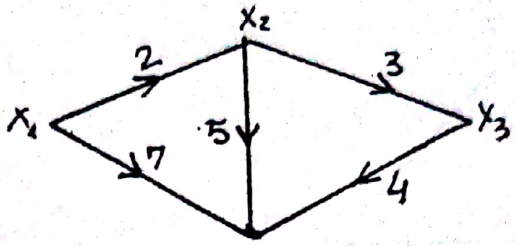


Fig. III.2.3

acestor arce, iar celelalte elemente sînt infinite, De exemplu: $v_{12} = 3$, deoarece graful conține arcul (x_1, x_2), cu valoarea trei, dar $v_{21} = \infty$, deoarece graful nu conține arcul (x_2, x_1). Dacă matricea valorilor ar fi fost scrisă în scopul determinării valorilor drumurilor maxime, ea ar fi diferit de cea din tabelul III.2.1 doar prin faptul că în locul elementelor egale cu ∞, ar fi fost $-\infty$.

Tabelul III.2.1

(V)

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	3	∞	7
x_2	∞	0	3	5
x_3	∞	∞	0	4
x_4	∞	∞	∞	0

Prin cercetare directă, cititorul se poate convinge că matricele valorilor minime, respectiv maxime, ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale grafului G, sînt cele din tabelele III.2.2 și III.2.3.

Tabelul III.2.2

(M)

	x_2	x_2	x_3	x_4
x_1	0	2	5	7
x_2	∞	0	3	5
x_3	∞	∞	0	4
x_4	∞	∞	∞	0

Tabelul III.2.3

(M)

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	2	5	9
x_2	$-\infty$	0	3	7
x_3	$-\infty$	$-\infty$	0	4
x_4	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0

Scanned with OKEN Scanner

2. Graful neorientat din figura III.2.4 a, poate fi înlocuit cu graful orientat din figura III.2.4 b, a cărei matrice a valorilor este cea din tabelul III.2.4. Evident, în graful dat se poate pune numai problema determinării valorilor minime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri.

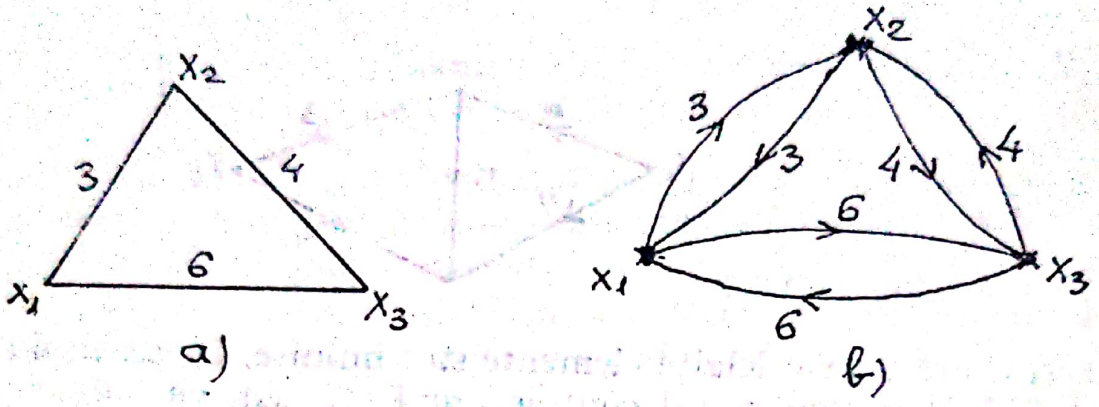


Fig. III.2.4. *a* și *b*

Deoarece problemele (i) și (ii) nu se pot rezolva cu ușurință prin cercetare directă, la grafuri de dimensiuni mari, este nevoie să folosim unii algoritmi în acest sens, algoritmi ce vor fi prezentați în cele ce urmează. La baza acestora stă

Tabelul III.2.4

(V)

	x_1	x_2	x_3
x_1	0	3	6
x_2	3	0	4
x_3	6	4	0

principiul de optimalitate al lui Bellman, care este un principiu general în matematică și care aplicat la problema noastră se enunță astfel:

„Orice drum optim în graf este format din subdrumuri optime din acel graf".

Vom ilustra aplicarea acestui principiu în cadrul descrierii fiecărui algoritm de drum optim în parte.

În cele ce urmează, prezentăm doi dintre algoritmi de tipul (i). Ei vor da, pe lîngă valoarea minimă a drumurilor dintre cele două vîrfuri specificate și alte valori minime analoage, ce nu se cer în problemă.

Algoritmul Bellman-Kalaba. Fie $G = (X, \gamma, v)$, unde $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, un graf orientat. Interesează găsirea

valorilor minime ale tuturor drumurilor de la fiecare vîrf al grafului, $x_i (i = 1, 2, ..., n)$, la un anumit vîrf fixat, fie acesta x_n (dacă vîrful fixat este altul decît x_n, îl trecem pe ultimul loc). Pornim cu matricea $V = \| v_{ij} \|$.

Fie $\overline{m}_{in}^{(k)}$ valoarea minimă a drumurilor formate din cel mult k arce, între x_i și x_n și fie $\overline{m}_{in}$ valoarea minimă a tuturor drumurilor de la x_i la x_n, indiferent de numărul de arce.

Teorema III.2.1. Fie $G = (X, \gamma, v)$, $X = \{x, x_2, .., x_n\}$, un graf orientat evaluat și x_n un vîrf fixat. Atunci:

$$\overline{m}_{in}^{(k+1)} = \min_{\{j; j \neq} \{v_{ij} + m_{jn}^{(k)}\} \text{ pentru } i \neq n.$$

Demonstrație. Evident, orice drum de valoare minimă de la x_i la x_n, format din cel mult $k + 1$ arce trebuie să fie format dintr-un arc (x_i, x_j), $i \neq j$ și un drum de la x_j la x_n, de cel mult k arce, care trebuie să aibă valoarea minimă față de toate celelalte drumuri formate din k arce de la x_j la x_n (conform principiului de optimalitate al lui Bellman).

Teorema III.2.2. Fie $G = (X, \gamma, v)$, $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, un graf orientat evaluat și x_n un vîrf fixat. Dacă $(\exists) k \in N$, astfel încît oricare ar fi vîrful x_i, să avem:

$$\overline{m}_{in}^{(k)} = \overline{m}_{in}^{(k+1)}, \text{ atunci } \overline{m}_{in}^{(k)} = \overline{m}_{in}, \ (\forall) x_i \in X.$$

Demonstrație. Dacă vîrfurile x_i și x_n sînt fixate și două numere naturale k, $p \in N$ sînt în relația $k \geqslant p$, atunci evident $\overline{m}_{in}^{(k)} \geqslant \overline{m}_{in}^{(p)}$. Trebuie arătat că, în condițiile teoremei: $\overline{m}_{in}^{(k)} = \overline{m}_{in}^{(k+s)}$, $s \in N$. Acest lucru se arată prin inducție matematică, după valorile numărului natural s.

Verificarea este imediată pentru $s = 1$, fiind chiar relația din enunț.

În etapa de demonstrare, presupunem adevărată relația $m_{in}^{(k)} = m_{in}^{(k+s)}$, pentru un s oarecare și trebuie să arătăm că este adevărată relația:

$$\overline{m}_{in}^{(k)} = \overline{m}_{in}^{(K+s+1)}.$$

Dar, aplicînd rezultatul teoremei III.2.1, avem:

$$\overline{m}_{in}^{(k+s+1)} = \min_{\{j; j \neq i\}} \{V_{ij} + \overline{m}_{jn}^{(k+s)}\} = \min_{\{j; i \neq i\}} \{V_{ij} + m_{jn}^{(k)}\} =$$

$$= \overline{m}_{in}^{(k+1)} = \overline{m}_{in}^{(k)}, \text{ pentru } x_i \neq x_n.$$

În acest șir de egalități am aplicat, de asemenea, ipoteza de inducție și condiția dată în enunțul teoremei.

Dacă $x_i = x_n$, proprietatea este evidentă.

Pe aceste teoreme se bazează algoritmul Bellman-Kalaba, conținînd următoarele etape:

Pas 1. Se construiește matricea valorilor V, corespunzînd grafului evaluat dat.

Pas 2. Se atașează noi linii în partea de jos a matricei V, notate $\overline{m}_{in}^{(1)}$, $\overline{m}_{in}^{(2)}$, ... care dau valorile minime ale drumurilor formate din 1, 2, ..., arce de la oricare vîrf x_i la vîrful x_n fixat și anume:

a) Linia $\overline{m}_{in}^{(1)}$ conține valorile minime ale drumurilor de la oricare vîrf x_i la x_n, formate dintr-un singur arc, deci conține valorile arcelor incidente interior lui x_n. Aceste valori vor fi date, evident, de coloana lui x_n din matricea V.

b) Presupunînd completată o linie oarecare $\overline{m}_{in}^{(k)}$, se trece la calculul liniei $\overline{m}_{in}^{(k+1)}$, pe baza relației dată de teorema III.2.1, pentru fiecare element în parte pentru $i \neq n$, dar evident adevărată și în cazul poziției diagonale cînd unul din arce este considerat degenerat (de valoare zero).

Evident $\overline{m}_{nn}^{(k)} = 0$, pentru orice $k \in N$.

c) Atașarea liniilor continuă pentru $k \leqslant n - 1$ pînă cînd $\overline{m}_{in}^{(k)} = \overline{m}_{in}^{(k+1)}$, și deci, conform teoremei III.2.2, s-au obținut aici tocmai valorile minime căutate, indiferent de numărul de arce străbătute.

Pas. 3. Se determină efectiv vîrfurile și arcele din drumul minim de la x_i la vîrful fixat x_n, astfel: adunăm element cu element linia x_i din V cu linia $\overline{m}_{in}^{(k+1)}$, căutînd cea mai mică valoare a sumei. Presupunem că $V_{ii_1} + \overline{m}_{i_1n}^{(k+1)} = \overline{m}_{in}^{(k+1)}$. Atunci, evident, arcul (x_i, x_{i_1}) este primul arc din drumul minim căutat. Cînd suma minimă se obține în dreptul mai multor coloane, atunci există mai multe drumuri corespunzînd valorii minime și se urmărește pînă la capăt fiecare variantă în parte.

Analog se adună linia x_{i_1} cu linia $\overline{m}_{in}^{(k+1)}$ căutînd arcul care asociat unui drum minim de la vîrful atins la x_n să dea valoarea $\overline{m}_{i_1n}^{(k+1)}$ găsită anterior. Se determină astfel al doilea arc (x_{i_1}, x_{i_2}) din succesiunea căutată, procedînd la fel pînă se află un arc cu vîrful x_n extremitate terminală. Rezultă drumul de valoare minimă, unic sau nu, de forma $(x_i, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}, x_n)$.

Observație. Algoritmul se poate aplica și în cazul determinării valorilor maxime ale drumurilor, înlocuind peste tot minimul prin maximum și luînd în considerare matricea V corespunzătoare (cu $-\infty$ în loc de $+\infty$).

Exemplu. Fie graful orientat din figura III.2.5, arcele fiind căi de transport între diferitele puncte, iar valorile scrise pe arce reprezentînd costurile unitare de transport de-a

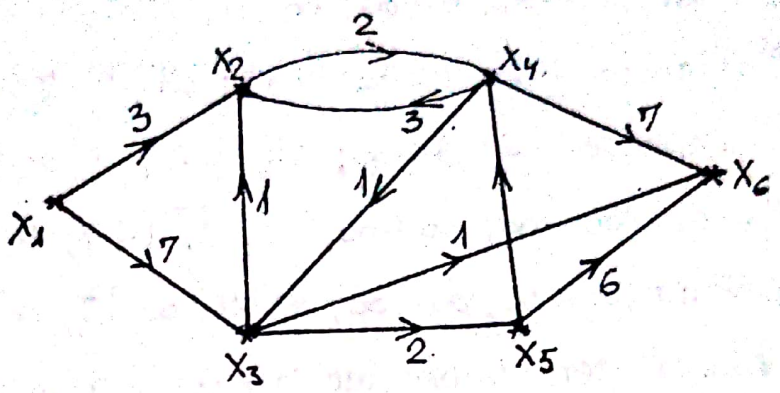


Fig. III.2.5

lungul arcelor corespunzătoare; se cere drumul pe care să se facă transportul, între x_1 și x_6, încît cheltuielile să fie minime. Trebuie aflată deci, mai întîi, valoarea minimă a drumurilor de la x_1 la x_6, precum și drumul (drumurile) ce realizează această valoare minimă.

Matricea valorilor, V, a grafului dat, este scrisă în tabelul III.2.5. Sub acest tabel, în continuarea matricei V,

Tabelul III.2.5

(V)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	3	7	∞	∞	∞
x_2	∞	0	∞	2	∞	∞
x_3	∞	1	0	∞	2	1
x_4	∞	3	1	0	∞	7
x_5	∞	∞	∞	1	0	6
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	0
$m_{i6}^{(1)}$	∞	∞	1	7	6	0
$m_{i6}^{(2)}$	8	9	1	2	6	0
$m_{i6}^{(3)}$	8	4	1	2	3	0
$m_{i6}^{(4)}$	7	4	1	2	3	0
$m_{i6}^{(5)}$	7	4	1	2	3	0

cînt calculate cinci linii suplimentare, ce sînt explicate parțial în continuare.

Linia notată cu $m_{i6}^{(1)}$ corespunde cu coloana x_6 a matricei V, fiind însă transpusă. Elementele liniei $m_{i6}^{(1)}$ au fost calculate succesiv astfel:

$$m_{16}^{(2)} = \min\{0+\infty;\ 3+\infty;\ 7+1;\ \infty+7;\ \infty+6;\ \infty+0\} = 8,$$

$$m_{26}^{(2)} = \min\{\infty+\infty;\ 0+\infty;\ \infty+1;\ 2+7;\ \infty+6;\ \infty+0\} = 9,$$

$$m_{36}^{(2)} = \min(\infty+\infty;\ 1+\infty;\ 0+1;\ \infty+7;\ 2+6;\ 1+0\} = 1,$$

$$m_{46}^{(2)} = \min\{\infty+\infty;\ 3+\infty;\ 1+1;\ 0+7;\ \infty+6;\ 7+0\} = 2,$$

$$m_{56}^{(2)} = \min\{\infty+\infty;\ \infty+\infty;\ \infty+1,\ 1+7;\ 0+6;\ 6+0\} = 6,$$

$$m_{66}^{(2)} = \min\{\infty+\infty;\ \infty+\infty;\ \infty+1;\ \infty+7;\ \infty+6;\ 0+0\} = 0.$$

Asemănător, au fost calculate celelalte linii suplimentare. Deoarece liniile $m_{i6}^{(4)}$ și $m_{i6}^{(5)}$ sînt identice, calculul acesta s-a oprit la linia $m_{i6}^{(5)}$; primul element al acestei linii, încadrat în tabelul III.2.5, reprezintă valoarea minimă a drumurilor de la x_1 la x_6 : $\overline{m}_{16} = 7$.

Pentru a determina drumul (drumurile) ce realizează această valoare, procedăm astfel:

a) Printre sumele elementelor de pe linia x_1, cu elementele corespunzătoare ale liniei $m_{i6}^{(5)}$, cea mai mică este egală cu 7 și se atinge pentru valoarea $v_{12} = 3$; înseamnă că primul arc al drumului căutat este $(x_1,\ x_2)$.

b) Printre sumele dintre elementele corespunzătoare ale liniilor x_2 și $m_{i6}^{(5)}$, cea mai mică este egală cu 4 și se atinge pentru valoarea $v_{24} = 2$; înseamnă că al doilea arc al drumului minim este $(x_2,\ x_4)$.

c) Printre sumele elementelor corespunzătoare ale liniilor x_4 și $m_{i6}^{(5)}$, cea mai mică este egală cu 2, atinsă pentru $v_{43} = 1$; cel de al treilea arc al drumului minim este deci $(x_4,\ x_3)$.

d) Printre sumele elementelor corespunzătoare ale liniilor x_3 și $m_{i6}^{(5)}$, cea mai mică este egală cu unu și este atinsă pentru $v_{36} = 1$; ultimul arc al drumului minim este deci $(x_3,\ x_6)$.

Din cele de mai sus, rezultă că drumul de valoare minimă, de la x_1 la x_6, este unic și anume: $d = (x_1,\ x_2,\ x_4,\ x_3,\ x_6)$, avînd o valoare de șapte unități. Pe acest drum, urmează să se organizeze transportul de la x_1 la x_6.

Scanned with OKEN Scanner

Algoritmul lui Yen. Pentru calculul valorilor minime de la un vîrf al grafului fixat, fie acesta x_1, la celelalte vîrfuri, $x_2, x_3, \ldots, x_n$, din G, adică $m_{12}, m_{13}, \ldots, m_{1n}$, se poate proceda și astfel:

Pasul 1. Se scrie matricea valorilor V și se determină cea mai mică dintre valori, care pleacă din x_1. Fie:

$$v_{1i_0} = \min_{i=2,\ldots,n} \{v_{1i}\}, \text{ deci } v_{1i_0} = m_{1i_0}.$$

Pasul 2. Toate elementele din prima linie a matricei V, exceptînd $v_{11} = 0$ și v_{1i_0}, se transformă astfel:

$$v_{1i} = \min_{\substack{i \neq 1 \\ i \neq i_0}} \{v_{1i};\ v_{1i_0} + v_{i_0 i}\}.$$

Din matricea astfel obținută, se suprimă linia de rang i_0 și coloana de rang i_0, păstrînd pentru celelalte linii și coloane rangurile lor inițiale. Dacă matricea obținută este de ordinul 2, atunci v_{12} din această matrice reprezintă valoarea minimă de la x_1 la x_k, unde k este rangul coloanei a doua (liniei a doua) din această matrice și algoritmul ia sfîrșit. Dacă matricea obținută are cel puțin ordinul trei, atunci se repetă pașii 1° și 2° asupra acestei matrici, ca și asupra matricei V, cu prima linie a acestei matrici.

Fiecare etapă de aplicare a algoritmului în cei doi pași scade ordinul matricei cu cîte o unitate și dă la fiecare etapă cîte o valoare minimă $m_{1i} (i = 2, 3, \ldots, n)$.

Justificarea algoritmului. În primul pas al primei etape de aplicare a algoritmului, $v_{1i_0} = \min_{i \geq 2} \{v_{1i}\} = m_{1i_0}$, deoarece orice drum de valoare minimă de la x_1 la x_{i_0} trebuie să înceapă cu un arc incident exterior lui x_1, deci valoarea sa este cel puțin egală cu valoarea celui mai scurt arc de forma (x_1, x_{i_0}) care este în particular un drum de la x_1 la x_{i_0}.

După o etapă a algoritmului, se obține o matrice corespunzînd unui subgraf $G_1 = (X_1, \gamma_1)$ al lui G, unde $X_1 = X \setminus \{x_{i_0}\}$. Vom arăta cum se determină valorile minime de la x_1 la x_i (cu $i \neq i_0$) în graful G. Fie un vîrf oarecare $x_i \neq x_{i_0}$. Există două posibilități, pe care le cercetăm în continuare.

Cazul 1. În graful G există un drum de la x_1 la x_i care nu trece prin x_{i_0}, fie aceasta $d = (x_1, x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_i)$ un drum minim. Rezultă că $v_{1j_1} \leq v_{1i_0} + v_{i_1 j_0}$, deoarece în caz contrar am putea înlocui arcul (x_1, x_{j_1}) printr-un drum format

Scanned with OKEN Scanner

din două arce, (x_1, x_{i_0}) și (x_{i_0}, x_{j_1}) și care este mai scurt, contrazicînd ipoteza. Prin înlocuirile de la pasul 2°, elementul v_{1j_1} din V rămîne neschimbat, deci valoarea drumului $(x_1, x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_i)$ este aceași în G și G_1. În graful G_1 însă, nu pot exista distanțe mai mici de la x_1 la x_i, cu $i \neq i_0$, deoarece oricărui drum $(x_1, x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}, x_i)$ din G_1 îi corespunde în G același drum, dacă $v_{1j_1} \leqslant v_{1i_0} + v_{i_0j_1}$, sau îi corespunde drumul $(x_1, x_{i_0}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}, x_i)$ din G dacă $v_{1j_1} \leqslant v_{1i_0} + v_{i_0j_1}$, cu valoare egală. Deci distanțele minime se conservă în G și G_1.

Cazul 2. În graful G, orice drum minim de la x_1 la x_i trece prin x_{i_0}. Fie un astfel de drum: $d(x_1, x_i) = (x_1, x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{i_0}, x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_i)$.

Deoarece valoarea arcului (x_1, x_{i_0}) este mai mică sau egală cu valoarea arcului (x_1, x_{j_1}), rezultă că și drumul:

$$d^1(x_1, x_i) = (x_1, x_{i_0}, x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_i)$$

este un drum de valoare minimă de la x_1 la x_i în G, în care x_{i_0} nu mai apare încă odată între $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_i$. Există evident relația: $v_{1k_1} > v_{1i_0} + v_{i_0k_1}$, deoarece în caz contrar și drumul $d''(x_1, x_i) = (x_1, x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_i)$ este drum de valoare minimă în G de la x_1 la x_i și nu trece prin x_i, contrazicînd ipoteza.

În pasul 2 al algoritmului Yen s-a înlocuit v_{1k_1} prin: $v_{1i_0} + v_{i_0k_1}$, deci valoarea drumului d^1 în G este egală cu valoarea drumului d'' în G_1, deci se conservă distanțele minime și în acest caz.

Exemplu. Fie graful orientat din figura III.2.6, ce reprezintă posibilitățile de transport al unui produs, între punctele x_1, x_2, x_3, x_4 și x_5. Valorile de pe arce reprezentînd costurile transportului pe arcele respective, să se determine drumul de la x_1 la x_5, încît costul total de transport să fie minim.

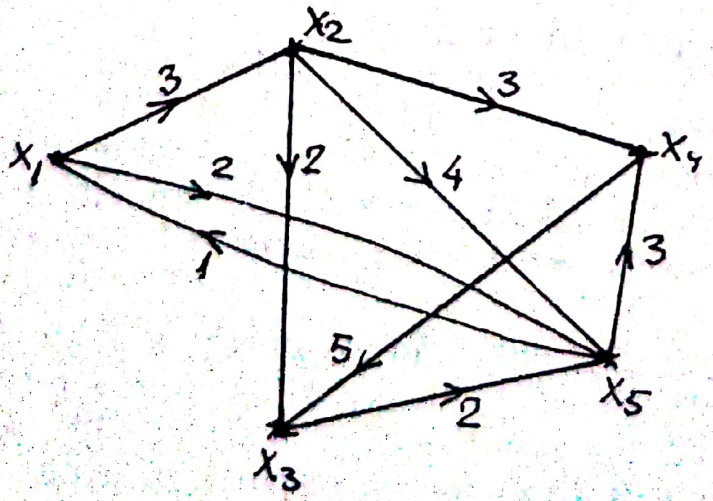


Fig. III.2.6.

Scanned with OKEN Scanner

Matricea valorilor grafului este cea din tabelul III.2.6. Avem: $m_{11} = 0$ și $\min\limits_{i \geq 2}\{v_{1i}\} = \min\{3, \infty, \infty, 2\} = 2$, deci $x_{i_1} = x_5$ și $m_{15} = 2$, iar drumul este $d(x_1, x_5) = (x_1, x_5)$.

Tabelul III.2.6

(V)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	3	∞	∞	2
x_2	∞	0	2	3	4
x_3	∞	∞	0		2
x_4	∞	∞	5	0	∞
x_5	1	∞	∞	3	0

Apoi, se suprimă din tabelul III.2.6 linia și coloana corespunzînd vîrfului x_5, ceea ce conduce la tabelul III.2.7, în

Tabelul III.2.7

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	3	∞	5
x_2	∞	0	2	3
x_3	∞	∞	0	∞
x_4	∞	∞	5	0

care s-au înlocuit elementele din prima linie ca la pasul 2° al algoritmului:

$$\tilde{v}_{12} = \min\{3;\ 2 + \infty\} = 3$$

$$\tilde{v}_{13} = \min\{\infty;\ 2 + \infty\} = \infty$$

$$\tilde{v}_{14} = \min\{\infty;\ 2 + 3\} = 5.$$

Din prima linie a tabelului III.2.7, se alege: $\min\limits_{i \geq 2}\{v_{1i}\} = \min\{3, \infty, 5\} = 3$, care corespunde vîrfului x_2. Avem deci $m_{12} = 3$ și $d(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$.

Acum se suprimă linia și coloana corespunzătoare lui x_2 și modificăm elementele din prima linie a matricei din tabelul III.2.7, cu formula de la pasul 2° a algoritmului:

$$\tilde{\tilde{v}}_{13} = \min\{\infty;\ 3 + 2\} = 5,$$

$$\tilde{\tilde{v}}_{14} = \min\{5;\ 3 + 3\} = 5.$$

Scanned with OKEN Scanner

Obținem tabelul III.2.8, în care avem: $m_{13} = m_{14} = 5$ și $d(x_1, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$; $d(x_1, x_4) = (x_1, x_5, x_4)$.

Tabelul III.2.8

	x_1	x_3	x_4
x_1	0	5	5
x_3	∞	0	∞
x_4	∞	5	0

În general, la acest algoritm găsirea drumului minim se poate face așa cum se explică mai jos. Drumul cel mai scurt de la x_i la x_j are lungimea m_{ij}, astfel că: $m_{ij} = m_{ik} + v_{kj}$, dacă (x_k, x_j) este ultimul arc al drumului minim. Pentru distanța minimă m_{ik} de la x_1 la x_k se procedează analog pentru găsirea ultimului arc al drumului. Dacă nu există nici un indice k cu proprietatea $k \neq i$, $k \neq j$ care să verifice egalitatea: $m_{ij} = m_{ik} + v_{kj}$, atunci singurul drum minim de la x_i la x_j este arcul: (x_i, x_j).

Observație. Pentru aflarea drumului de valoare maximă, se folosește inițial matricea V corespunzătoare și se alege de fiecare dată valoarea maximă de pe linia tabelului rămas.

În continuare, prezentăm trei algoritmi ce rezolvă problemele (ii), deci care conduc la calcularea matricei M, a valorilor minime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale grafului.

Algoritmul ROY-FLOYD. Fie $G = (X, \gamma, v)$, unde $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Algoritmul Roy-Floyd determină atît valorile distanțelor minime între oricare două vîrfuri ale grafului, cît și drumurile minime corespunzătoare și se bazează pe următoarea teoremă:

Teorema III.2.3. Dacă, într-un graf oarecare G, este îndeplinită inegalitatea:

$v_{ij} \leqslant v_{ik} + v_{kj}$, pentru orice $i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$, atunci valoarea minimă a drumurilor de la x_i la x_j este valoarea v_{ij}.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Presupunem că există cel puțin un drum de valoare finită de la x_i la x_j, fie acesta:

$d(x_i, x_j) = (x_i, x_{h_1}, x_{h_2}, \ldots, x_{h_s}, x_j)$ și din ipoteza teoremei se deduce din aproape în aproape că:

$$v_{ih_2} \leqslant v_{ih_1} + v_{h_1h_2},$$
$$v_{ih_3} \leqslant v_{ih_2} + v_{h_2h_3} \leqslant v_{ih_1} + v_{h_1h_2} + v_{h_2h_3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$v_{ij} \leqslant v_{ih_1} + v_{h_1h_2} + \ldots v_{h_sj}.$$

de unde justețea concluziei teoremei.

Algoritmul pentru aflarea matricei M, a valorilor minime a drumurilor, are etapele următoare:

Pasul 1. Se asociază grafului matricea $V = (v_{ij})$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ și matricea $C = \| C_{ij} \|$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, unde C_{ij} sînt mulțimi de noduri sau vîrfuri din care pleacă arce, deci:

$$C_{ij} = \begin{cases} \{x_i\}, \text{ dacă } v_{ij} \text{ finit}, \\ \emptyset, \text{ dacă } v_{ij} = \infty. \end{cases}$$

Pasul 2. Ținînd seama de afirmația teoremei, se determină matricile $V_k = \| v_{ij}^{(k)} \|$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, n$, în care se modifică valorile v_{ij} care nu satisfac teorema și deci se pot micșora, astfel:

$$v_{ij}^{(1)} = \begin{cases} v_{ij}, \text{ dacă } i \neq j \text{ și } i = 1, \text{ sau } j = 1, \\ 0, \text{ dacă } i = j, \\ \min(v_{ij}, v_{i1} + v_{1j}), \text{ dacă } i \neq j, i \neq 1; j \neq 1. \end{cases}$$

În general, pentru $k = 2, 3, \ldots, n$, punem.

$$v_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } i = j, \\ v_{ij}^{(k-1)}, \text{ dacă } i \neq j; i = k \text{ sau } j = k \\ \min\{ v_{ij}^{(k-1)}; v_{ik}^{(k-1)} + v_{kj}^{(k-1)} \}, \text{ dacă } i \neq j; i \neq k; j \neq k. \end{cases}$$

Analog se află matricile C_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Mai precis, elementele matricei $C_k = \| C_{ij}^{(k)} \|$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, se află astfel:

$$C_{ij}^{(k)} = \begin{cases} C_{ij}^{(k-1)}, \text{ dacă } v_{ij}^{(k-1)} < v_{ik}^{(k-1)} + v_{kj}^{(k-1)}, \\ C_{ij}^{(k-1)} \cup C_{kj}^{(k-1)}, \text{ dacă } v_{ij}^{(k-1)} = v_{ik}^{(k-1)} + v_{kj}^{(k-1)}, \\ C_{kj}^{(k-1)}, \text{ dacă } v_{ij}^{(k-1)} > v_{ik}^{(k-1)} + v_{kj}^{(k-1)}, \end{cases}$$

cu convenția: $C_{ij}^{(0)} = C_{ij}$ și $v_{ij}^{(0)} = v_{ij}$.

Scanned with OKEN Scanner

În final, $V_n \equiv M$, iar C_n dă efectiv drumurile minime, ținînd cont de mulțimile vîrfurilor vecine cu fiecare vîrf x_j, date de elementele $C_{ij}^{(n)}$, reconstituind drumul în sens invers.

Exemplu. Fie graful din figura III.2.6, folosit și în exemplul precedent. Trebuie să găsim costurile minime de transport, între oricare două puncte ale grafului. Cu alte cuvinte, trebuie să se determine matricea valorilor minime dintre vîrfurile grafului și drumurile corespunzătoare acestor trasee optime. Matricele V și C, din primul pas al algoritmului, se găsesc în tabelele III.2.9 și III.2.9′.

Tabelul III.2.9

V:

0	3	∞	∞	2
∞	0	2	3	4
∞	∞	0	∞	2
∞	∞	5	0	∞
1	∞	∞	3	0

Tabelul III.2.9′

C:

x_1	x_1			x_1
	x_2	x_2	x_2	x_2
		x_3		x_3
		x_4	x_4	
x_5			x_5	x_5

Aplicăm pasul 2 al algoritmului pe rînd, pentru $k = 1, 2, \ldots, n$. Avem succesiv rezultatele conținute în tabelele III.2.10 —III.2.14′.

Tabelul III.2.10

V_1:

0	3	∞	∞	2
∞	0	2	3	4
∞	∞	0	∞	2
∞	∞	5	0	∞
1	4	∞	3	0

Tabelul III.2.10′

C_1:

x_1	x_2			x_1
	x_2	x_2	x_2	x_2
		x_3		x_3
		x_4	x_4	
x_5	x_1		x_5	x_5

Tabelul III.2.11

V_2:

0	3	5	6	2
∞	0	2	3	4
∞	∞	0	∞	2
∞	∞	5	0	∞
1	4	6	3	0

Tabelul III.2.11′

C_2:

x_1	x_1	x_2	x_2	x_1
	x_2	x_2	x_2	x_2
		x_3		x_3
		x_4	x_4	
x_5	x_1	x_2	x_5	x_5

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul III.2.12

V_3:

0	3	5	6	2
∞	0	2	3	4
∞	∞	0		2
∞	∞	5	0	7
1	4	6	3	0

Tabelul III.2.12′

C_3:

x_1	x_1	x_2	x_2	x_1
	x_2	x_2	x_2	x_2, x_3
		x_3		x_3
		x_4	x_4	x_3
x_5	x_1	x_2	x_5	x_5

Tabelul III.2.13

V_4:

0	3	5	6	2
∞	0	2	3	4
∞	∞	0	∞	2
∞	∞	5	0	7
1	4	6	3	0

Tabelul III.2.13′

C_4:

x_1	x_1	x_2	x_2	x_1
	x_2	x_2	x_2	x_2, x_3
		x_3		x_3
		x_4	x_4	x_3
x_5	x_1	x_2	x_5	x_5

Tabelul III.2.14

V_5:

0	3	5	5	2
5	0	2	3	4
3	6	0	5	2
8	11	5	0	7
1	4	6	3	0

Tabelul III.2.14′

C_5:

x_1	x_1	x_2	x_5	x_1
x_5	x_2	x_2	x_2	x_2, x_3
x_5	x_5	x_3	x_5	x_3
x_5	x_5	x_4	x_4	x_3
x_5	x_1	x_2	x_5	x_5

Să alegem cîteva distanțe minime din tabelul III.2.14, III.2.14′.

a) $m_{14} = 5$ și $d(x_1, x_4) = (x_1, x_5, x_4)$, citit pe prima linie din C_5, reconstituind drumul de la sfîrșit astfel: vîrful x_4 este precedat de x_5 aflat în căsuța (1, 4), vîrful x_5 este precedat de x_1 aflat în căsuța (1, 5), care este vîrful inițial al drumului.

b) $m_{25} = 4$ și $d(x_2, x_5) = (x_2, x_5)$ sau $d(x_2, x_5) = (x_2, x_3, x_5)$, deci două drumuri cu aceeași lungime minimă 4, aflate pe linia lui x_2 din tabelul III.2.14′, ca mai sus.

c) $m_{42} = 11$ și $d(x_4, x_2) = (x_4, x_3, x_5, x_1, x_2)$.

Drumurile aflate sînt cele pe care trebuie organizat transportul, între vîrfurile corespunzătoare.

Algoritmul lui Dantzig. Algoritmul lui Dantzig este un procedeu de calcul recursiv pentru găsirea distanțelor minime

Scanned with OKEN Scanner

în subgrafe cu 2, 3, ..., n vîrfuri. În cazul în care funcția $v: \gamma \to R$ poate lua și valori negative, algoritmul poate detecta și eventualele circuite negative, a căror semnificație este că distanța între oricare două vîrfuri poate fi făcută oricît de mică parcurgînd circuitele respective de un număr de ori suficient de mare, deci nu există o cea mai mică distanță finită între vîrfurile circuitelor.

Fie graful evaluat $G = (X, \gamma, v)$ și $G^{(k)} = (X_k, \gamma_k, v_k)$ subgraful lui G în care mulțimea vîrfurilor este: $X_k = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, $k \leqslant n$. Fie, de asemenea, $M^{(k)} = \| m_{ij}^{(k)} \|$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$, matricea distanțelor minime în subgraful $G^{(k)}$.

Pasul 1. Se face $k = 2$ și $m_{12}^{(2)} = v_{12}$; $m_{21}^{(2)} = v_{21}$. Dacă $v_{12} + v_{21} < 0$ ne oprim, s-a detectat circuitul negativ (x_1, x_2, x_1) și problema distanțelor minime în G își pierde sensul. În caz contrar, pentru $v_{12} + v_{21} \geqslant 0$ se ia $m_{11}^{(2)} = m_{22}^{(2)} = 0$ și se trece la pasul 2°, succesiv pentru $k = 3, 4, \ldots, n$.

Pasul 2. Cunoscînd matricea $M^{(k-1)}$, se află elementele matricei $M^{(k)}$, prin recurență, astfel:

a) $m_{ik}^{(k)} = \min\limits_{j=1, 2, \ldots, k-i} \{m_{ij}^{(k-1)} + v_{jk}\}$, pentru $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

b) $m_{kj}^{(k)} = \min\limits_{i=1, 2, \ldots, k-1} \{v_{ki} + m_{ij}^{(k-1)}\}$, pentru $j = 1, 2, \ldots, k-1$.

Se verifică dacă există un indice i, anume $1 \leqslant i \leqslant k-1$, pentru care: $m_{ik}^{(k)} + m_{ki}^{(k)} < 0$ și în acest caz ne oprim, existînd un circuit negativ în subgraful cu mulțimea de vîrfuri X_k, care trece prin vîrfurile x_i și x_k. În caz contrar, elementele de pe diagonală sînt egale cu zero și se calculează elementele:

c) $m_{ij}^{(k)} = \min \{m_{ij}^{(k-1)}; m_{ik}^{(k)} + m_{kj}^{(k)}\}$,
pentru $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, k-1$.

La sfîrșitul algoritmului, elementele $m_{ij}^{(n)}$ dau distanțele minime în G, unde $m_{ii}^{(k)} = 0$, oricare ar fi $i = 1, 2, \ldots, n$ și $k = 2, 3, \ldots, n$. Dacă graful nu conține arce cu lungimea negativă, nu se mai verifică la pasul 2° existența circuitelor negative.

Justificarea algoritmului. Prin inducție după k, arătăm că valorile $m_{ik}^{(k)}$ și $m_{kj}^{(k)}$ date de formulele a), b), c) dau distanțele minime în subgrafurile cu mulțimile de vîrfuri X_2, X_3, ..., $X_n = X$ (pentru $k = 2, 3, \ldots, n$, respectiv).

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $k = 2$, subgraful $G^{(2)}$ are numai două vîrfuri, $X_2 = \{x_1, x_2\}$ și distanțele minime între ele coincid cu distanțele directe (prin arce). Presupunînd că nu există circuite negative, facem ipoteza că formulele sînt adevărate pînă la $k - 1$ și demonstrăm valabilitatea lor pentru $G^{(k)}$. Distanța minimă între un vîrf $x_i (i = 1, 2, \ldots, k - 1)$ și x_k în G este fie distanța directă v_{ik}, obținută din formula a) $j = i$, fie valoarea unui drum minim $d(x_i, x_k) = (x_i, x_{k_1}, \ldots, x_{k_s}, x_{j_0}, x_k)$, format cu vîrfuri din X_k. Dar $(x_i, x_{k_1}, \ldots, x_{k_s}, x_{j_0})$ este un drum minim în $G^{(k-1)}$, a cărui lungime este $m_{ij_0}^{(k-1)}$ conform ipotezei de inducție, deoarece, în caz contrar, acest drum s-ar putea înlocui printr-un drum mai scurt de la x_i la x_j în $G^{(k-1)}$ și care prelungit cu arcul (x_{j_0}, x_k) ar genera un drum mai scurt decît $(x_i, x_{k_1}, \ldots, x_{k_s}, x_{j_0}, x_k)$, contrazicînd ipoteza. Deci $m_{ik}^{(k)} = m_{ij_0}^{(k-1)} + v_{j_0 k} = j = \min_{1,2,\ldots,k-1} \{m_{ij}^{(k-1} + v_{ij}\}$ adică formulele a) sînt adevărate pentru orice $i = 1, 2, \ldots, \ldots, k - 1$.

Dacă ar exista un indice $i (1 \leqslant i \leqslant k - 1)$ pentru care $m_{ik}^{(k)} + m_{ki}^{(k)} < 0$, atunci ar exista un circuit negativ care trece prin vîrful x_k în $G^{(k)}$, deci și în graful G.

Valabilitatea formulelor b) se face în mod asemănător.

Pentru formulele c), considerăm un drum de valoare minimă de la x_i la x_j în subgraful $G^{(k)}$. Dacă acest drum nu trece prin vîrful x_k, atunci el este un drum minim în subgraful $G^{(k-1)}$ și are valoarea $m_{ij}^{(k-1)}$, conform ipotezei de inducție. Dacă drumul trece prin x_k, atunci el se compune din două subdrumuri, unul de la x_i la x_k, iar celălalt de la x_k la x_j, minimalitatea sa impunînd condiția ca ambele subdrumuri să fie drumuri minime în subgraful G^k (principiul lui Bellman).

Deci, valoarea drumului minim de la x_i la x_j este în acest caz $m_{ik}^{(k)} + m_{kj}^{(k)}$, unde $m_{ik}^{(k)}$ și $m_{kj}^{(k)}$ sînt date de formulele a) și b).

În concluzie, formula c) este adevărată pentru orice i, $j = 1, 2, \ldots, k$.

Exemplu. Reluînd exemplul rezolvat anterior prin algoritmul lui Roy-Floyd, algoritmul lui Dantzig dă matricile drumurilor minime în subgrafele $G^{(2)}$, $G^{(3)}$, $G^{(4)}$, $G^{(5)} \subset G$, ce

Scanned with OKEN Scanner

se găsesc în tabelele III.2.15—III.2.18. Subgrafele însile sînt reprezentate în figura III.2.7 a, b, c, respectiv în figura III.2.6 ($G^{(5)}$).

Tabelul III.2.15

$M^{(2)}$:

	x_1	x_2
x_1	0	3
x_2	∞	0

Tabelul III.2.16

$M^{(3)}$:

	x_1	x_2	x_3
x_1	0	3	5
x_2	∞	0	2
x_3	∞	∞	0

Tabelul III.2.17

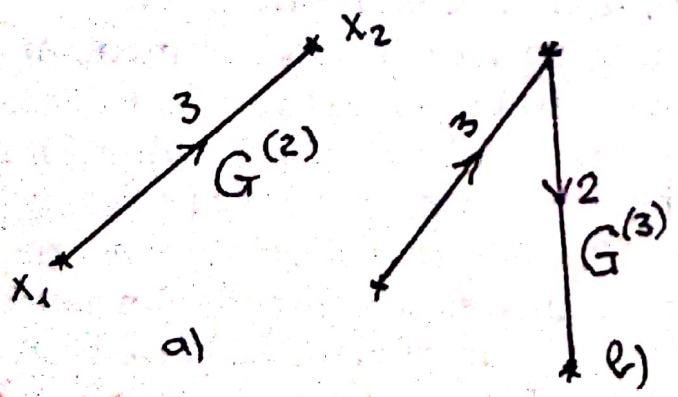
$M^{(4)}$:

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	3	5	6
x_2	∞	0	2	3
x_3	∞	∞	0	∞
x_4	∞	∞	5	0

Tabelul III.2.18

$M^{(5)}$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	3	5	5	2
x_2	5	0	2	3	4
x_3	3	6	0	5	2
x_4	8	11	5	0	7
x_5	1	4	∞	∞	∞



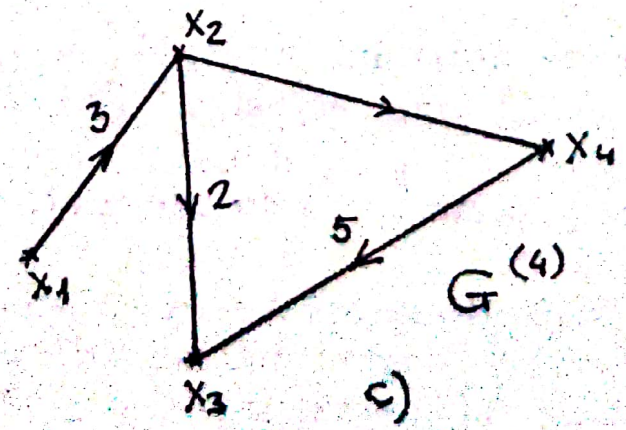


Fig. III.2.7

Găsirea drumurilor minime se poate face după cum urmează. Pentru $m_{ij}^{(n)} = m_{ij}$ se ia linia lui x_i din V, care dă valorile directe de la x_i la alte vîrfuri și se adună cu coloana x_j din $M^{(n)} \equiv M$, care dă valorile minime de la diferite vîrfuri pînă la x_i și se caută sumele de valoare m_{ij}. Se află un prim arc al drumului căutat, (x_i, x_1) și se lucrează analog cu linia x_{i_1} din V și coloana x_j din M căutînd suma m_{ii_1} pentru cel de al doilea arc al drumului ș.a.m.d. În exemplul dat, avem:

$$m_{42} = 11 \text{ și } d(x_4, x_2) = (x_4, x_3, x_5, x_1, x_2).$$

Algoritmul „aritmeticii modificate". Acest algoritm folosește o operație între matrici, pe care o vom defini în mod convențional în cele ce urmează. Analogia cu operațiile aritmetice obișnuite, ne face să spunem că operațiile introduse sînt de „aritmetică modificată".

Se înmulțesc două matrice pătratice A și B după regula „aritmeticii modificate", astfel:

$A \tilde{*} B = C$, pentru: $A = \| a_{ij} \|$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$;

$B = \| b_{ij} \|$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$; $C = \| C_{ij} \|$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$,

dacă: $C_{ij} = \min\limits_{k} \{a_{ik} + b_{kj}\}$, adică în produsul obișnuit de matrici, definim: $a \tilde{\times} b = a + b$; $a \tilde{+} b = \min \{a, b\}$.

Teorema III.2.4. Fie un graf evaluat oarecare și fie V, matricea valorilor; construind $V^{(2)}$, $V^{(3)}$, pînă cînd $V^{(k)} \equiv V^{k+1}$; $k \leqslant n - 1$, atunci $V^{(k)} \equiv M$.

Într-adevăr, matricele $V^{(2)}$, $V^{(3)}$, ..., $V^{(k)}$ reprezintă matrici ale drumurilor minime formate din 2, 3, ..., k arce, pînă cînd lungimea nici unui drum nu se mai micșorează prin adăugarea de alte arce, adică minimul este atins. Algoritmul se bazează pe principiul de optimalitate al lui Bellman.

Algoritmul constă în calculul succesiv al matricelor $V^{(2)} = V \tilde{*} V$; $V^{(3)} = V^{(2)} \tilde{*} V$; ..., pînă cînd două matrici consecutive de acest fel sînt identice. În acest caz, aceste ultime matrici coincid cu matricea M, a valorilor minime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale grafului.

Existența unui indice $k \leqslant n - 1$, pentru care $V^{(k)} = V^{(k+1)}$, este asigurată de proprietatea că un drum elementar într-un graf cu n vîrfuri are cel mult $(n - 1)$ arce. Bineînțeles, am presupus că graful G nu are circuite de valori negative (eventual are toate valorile de pe arce pozitive), caz în care orice drum minim este un drum elementar.

Scanned with OKEN Scanner

Observații. 1. Odată determinată matricea M, determinarea efectivă a drumurilor minime se face ca și la celelalte algoritme.

2. Pentru determinarea matricei M, a valorilor maxime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale unui graf (care nu conține circuite cu valori pozitive), toate algoritmele matriceale se adaptează ușor, folosind matricea V adecvată acestei probleme și înlocuind peste tot minimul prin maximum.

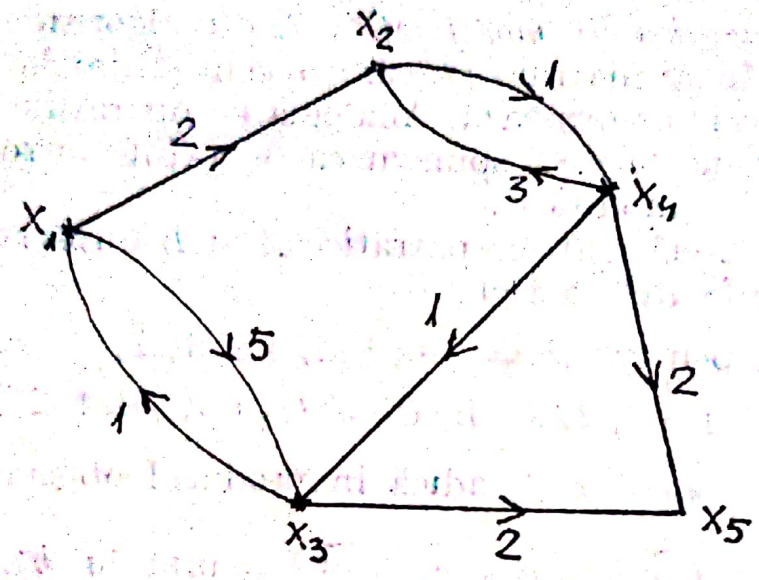


Fig. III.2.8

Exemplu. Fie graful G, din figura III.2.8, reprezentînd un sistem cu ajutorul căruia se poate realiza transportul unor produse, între diferitele puncte ale sistemului. Pe arcele grafului sînt scrise timpurile de parcurs ale acestor arce. Să se determine timpurile minime de transport al produselor între diferitele puncte ale sistemului.

Cerința problemei va fi realizată prin calcularea matricei M, a valorilor minime ale drumurilor dintre oricare două vîrfuri ale grafului. Pornim de la matricea V, dată în tabelul III.2.19.

Tabelul III.2.19

(V)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	2	5	∞	∞
x_2	∞	0	∞	1	∞
x_3	1	∞	0	∞	2
x_4	∞	3	1	∞	2
x_5	∞	∞	∞	∞	0

Scanned with OKEN Scanner

Vom face succesiv următoarele operații:

$$V^{(2)} = V \tilde{*} V = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 1 & \infty \\ 1 & \infty & 0 & \infty & 2 \\ \infty & 3 & 1 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \tilde{*} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 1 & \infty \\ 1 & \infty & 0 & \infty & 2 \\ \infty & 3 & 1 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 3 & 7 \\ \infty & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & \infty & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix};$$

$$V^{(3)} = V^{(2)} V = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 3 & 7 \\ \infty & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & \infty & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \tilde{*} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 1 & \infty \\ 0 & \infty & 2 & \infty & 1 \\ \infty & 3 & 1 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix};$$

$$V^{(2)} = V^{(3)} \tilde{*} V = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \tilde{*} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 1 & \infty \\ 1 & \infty & 0 & \infty & 2 \\ \infty & 3 & 1 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

Deoarece am obținut $V^{(3)} = V^{(4)}$, fiecare dintre aceste matrice este egală cu matricea M, cerută de problemă.

Observație. Calculul puterilor matricei V poate fi prescurtat, efectuînd operațiile în ordinea următoare: $V^{(2)} = V \tilde{*} V$; $V^{(4)} = V^{(2)} \tilde{*} V^{(2)}$; $V^{(8)} = V^{(4)} \tilde{*} V^{(4)}$ etc. Aceste operații se fac pînă cînd două matrice regulate sînt identice, sau pînă cînd exponentul simbolic al lui V devine egal, sau depășește pe $(n-1)$, n fiind numărul de vîrfuri ale grafului.

Scanned with OKEN Scanner

Probleme rezolvate

1. Într-o secție a unei întreprinderi, se aplică asupra unui produs anumite operații de prelucrare. Prelucrările ce se pot face, tehnologiile posibile de ordonare a lor și costurile unitare asociate fiecărei prelucrări sînt date într-un model-graf evaluat, cu reprezentarea geometrică dată prin figura III.2.9.

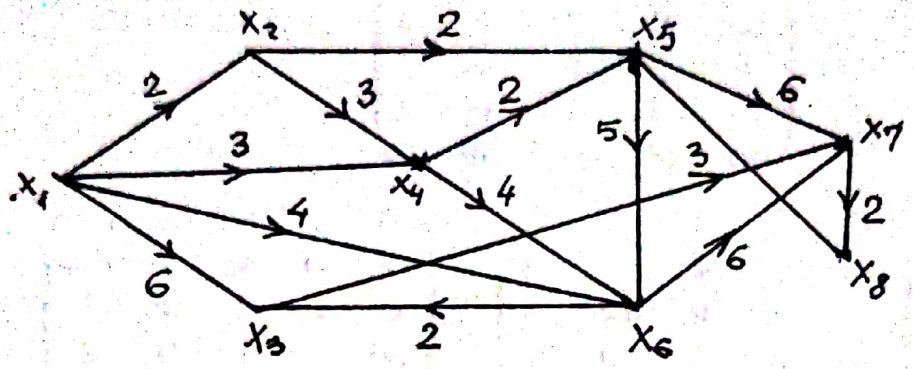


Fig. III.2.9

Să se determine tehnologia corespunzătoare celui mai scăzut cost unitar total.

Rezolvare. Sensul economic al elementelor grafului dat impune ca acesta să nu aibă circuite, ceea ce verificăm cu ajutorul matricei drumurilor.

Tabelul III.2.20 conține matricea arcelor grafului dat, cu ajutorul căreia s-a calculat matricea drumurilor, din tabelul III.2.21.

Tabelul III.2.20

(*A*)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	1	1	1	0	1	0	0
x_2	0	0	0	1	1	0	0	0
x_3	0	0	0	0	0	0	1	0
x_4	0	0	0	0	1	1	0	0
x_5	0	0	0	0	0	1	1	1
x_6	0	0	1	0	0	0	1	0
x_7	0	0	0	0	0	0	0	1
x_8	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabelul III.2.21

(*D*)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	1	1	1	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	1	1	1	1
x_3	0	0	0	0	0	0	1	1
x_4	0	0	0	0	1	1	1	1
x_5	0	0	1	0	0	1	1	1
x_6	0	0	1	0	0	0	1	1
x_7	0	0	0	0	0	0	0	1
x_8	0	0	0	0	0	0	0	0

Trebuie determinat drumul de valoare minimă de la x_1 (care evident reprezintă starea inițială a produsului) la x_8 (care reprezintă starea finală).

Aplicăm algoritmul Bellman-Kalaba. Matricea valorilor, împreună cu liniile suplimentare, se găsesc în tabelul III.2.22.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul III.2.22

$(V) =$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	2	6	3	∞	4	∞	∞
x_2	∞	0	∞	3	2	∞	∞	∞
x_3	∞	∞	0	∞	∞	∞	3	∞
x_4	∞	∞	∞	0	∞	2	4	∞
x_5	∞	∞	∞	∞	0	5	6	7
x_6	∞	∞	2	∞	∞	0	6	∞
x_7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	2
x_8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0
$m_{i8}^{(1)}$	∞	∞	∞	∞	7	∞	2	0
$m_{i8}^{(2)}$	∞	9	5	9	7	8	2	0
$m_{i8}^{(3)}$	11	9	5	9	7	7	2	0
$m_{i8}^{(4)}$	11	9	5	9	7	7	2	0

Din cercetarea acestui tabel, se observă că tehnologia de la x_1 la x_8, cu cost minim, corespunde costului 11.

Căutăm arcele care formează drumul de valoare minimă, adunînd întîi linia x_1 la $m_{i8}^{(4)}$ și căutînd sumele de valoare minimă, adică 11, avem: $2 + 9 = 6 + 5 = 4 + 7$; deci sînt trei variante, anume drumul începe fie cu arcul (x_1, x_2), fie cu arcul (x_1, x_3), fie cu arcul (x_1, x_6). Urmărim prima variantă, adunînd linia x_2 la m_{i8} și căutînd sumele de valoare 9, avem $2 + 7 = 9$, deci al doilea arc din prima variantă este (x_2, x_5) și rămîne de la x_5 la x_8 un drum de lungime minimă 7, care este tocmai arcul (x_5, x_8). Drumul în prima variantă, format din 3 arce, este: (x_1, x_2, x_5, x_8). Analog procedăm în celelalte două variante și obținem drumurile: (x_1, x_3, x_7, x_8) și $(x_1, x_3, x_3, x_7, x_8)$. Geometric, cele trei drumuri optime găsite, formează graful parțial din figura III.2.10.

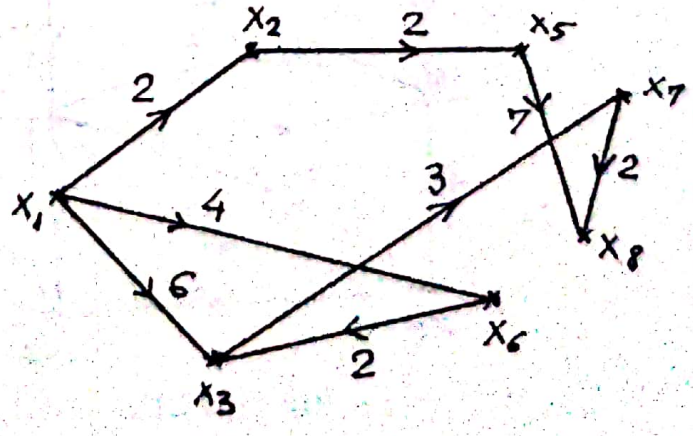


Fig. III.2.10

2. Pentru aprovizionarea cabanelor dintr-un complex turistic alpin, se folosesc atît posibilitățile de transport rutier pe drumurile forestiere, cît și transportul pe teleferic. Condițiile existente fac ca pe unele trasee să se poată circula în ambele sensuri, iar pe altele într-un singur sens, bine determinat. Aceste posibilități sînt oglindite într-un model graf prin muchii sau, respectiv, arce, considerînd că muchia conține două arce de sens contrar. Se cunosc distanțele pe fiecare porțiune a diverselor trasee. Știind că aprovizionarea se poate face din centrele x_1 și x_2, să se găsească cele mai scurte trasee ce trebuiesc parcurse de la aceste centre la toate cabanele complexului, modelul graf fiind cel din figura III.2.11.

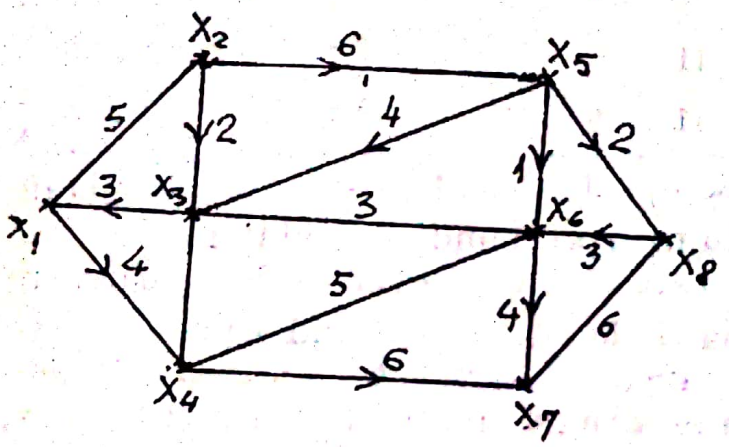


Fig. III.2.11

Rezolvare. Graful mixt poate fi transformat în graf orientat, înlocuind fiecare muchie prin două arce de sens contrar și de aceeași valoare, ceea ce conduce la graful orientat din figura III.2.12.

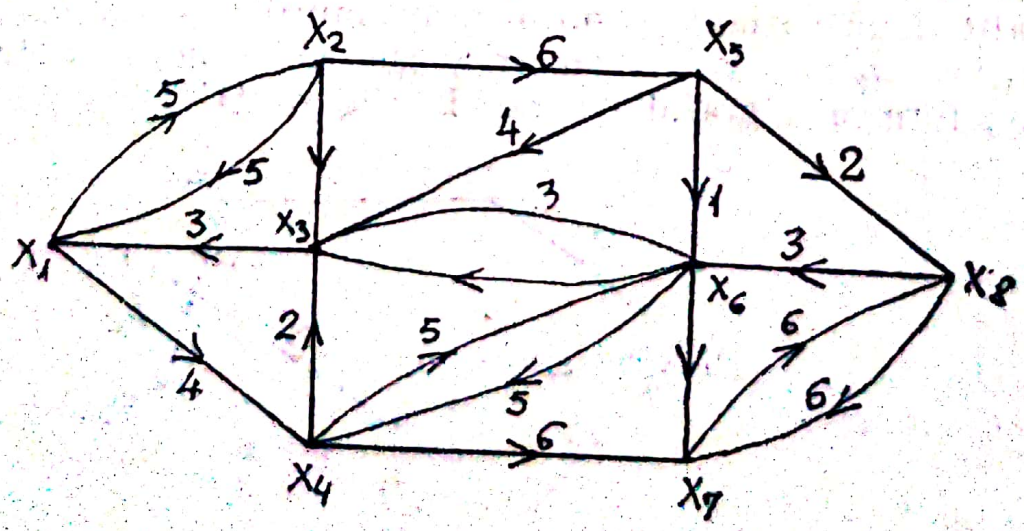


Fig. III.212

Scanned with OKEN Scanner

Aplicăm algoritmul lui Dantzig, pentru aflarea tuturor rutelor minimale. Pornim cu matricea valorilor V, din tabelul III.2.23.

Tabelul III.2.23

(V)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	5	∞	4	∞	∞	∞	∞
x_2	5	0	2	∞	6	∞	∞	∞
x_3	3	∞	0	∞	∞	3	∞	∞
x_4	∞	∞	2	0	∞	5	6	∞
x_5	∞	∞	4	∞	0	1	∞	∞
x_6	∞	∞	3	5	∞	0	4	∞
x_7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	6
x_8	∞	∞	∞	∞	∞	3	6	0

Deducem recursiv matricele $M^{(k)}$, $k = 2, 3, \ldots, 8$, ce se găsesc în tabelele III.2.24—III.2.30. Ultimul dintre aceste tabele conține matricea M căutată.

Tabelul III.2.24

$M^{(2)}$

	x_1	x_2
x_1	0	5
x_2	5	0

Tabelul III.2.25

$M^{(3)}$

	x_1	x_2	x_3
x_1	0	5	7
x_2	5	0	2
x_3	3	8	0

Tabelul III.2.26

$M^{(4)}$

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1		5	6	4
x_2	5	0	2	9
x_3	3	8	0	7
x_4	5	10	2	0

Tabelul III.2.27

$M^{(5)}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	5	6	4	11
x_2	5	0	2	9	6
x_3	3	8	0	7	4
x_4	5	10	2	0	16
x_5	7	12	4	11	0

Tabelul III.2.28

$M^{(6)}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	5	6	4	11	9
x_2	5	0	2	9	6	5
x_3	3	8	0	8	14	3
x_4	5	10	2	0	16	5
x_5	7	12	4	6	0	1
x_6	6	11	3	5	17	0

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul III.2.29

$M^{(7)}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	5	6	4	11	9	10
x_2	5	0	2	9	6	5	9
x_3	3	8	0	7	14	3	7
x_4	5	10	2	0	16	5	6
x_5	7	12	4	6	0	1	5
x_6	6	12	3	5	17	0	4
x_7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

Tabelul III.2.30

$M^{(8)}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	5	6	4	11	9	10	12
x_2	5	0	2	9	6	5	9	8
x_3	3	8	0	7	14	3	7	13
x_4	5	10	2	0	16	5	6	12
x_5	7	12	4	6	0	1	5	2
x_6	6	11	3	5	17	0	4	10
x_7	15	20	12	14	26	0	9	6
x_8	9	14	6	8	20	3	6	0

Drumurile de valori minime, care pleacă din centrul x_1, sînt:

$d(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$, cu $m_{12} = 5$;
$d(x_1, x_3) = (x_1, x_4, x_3)$, cu $m_{13} = 6$;
$d(x_1, x_4) = (x_1, x_4)$, cu $m_{14} = 4$;
$d(x_1, x_5) = (x_1, x_2, x_5)$, cu $m_{15} = 11$;
$d(x_1, x_6) = (x_1, x_4, x_6)$, cu $m_{16} = 9$;
$d(x_1, x_7) = (x_1, x_4, x_7)$, cu $m_{17} = 10$;
$d(x_1, x_8) = (x_1, x_2, x_5, x_8)$, cu $m_{18} = 13$.

Drumurile de valori minime, care pleacă din centrul x_4, sînt:

$d(x_4, x_1) = (x_4, x_4, x_1)$, cu $m_{41} = 5$;
$d(x_4, x_2) = (x_4, x_3, x_1, x_2)$, cu $m_{42} = 10$;
$d(x_4, x_3) = (x_4, x_3)$, cu $m_{43} = 2$;
$d(x_4, x_5) = (x_4, x_3, x_1, x_2, x_5)$, cu $m_{45} = 16$;
$d(x_4, x_6) = (x_4, x_6)$, cu $m_{46} = 5$;
$d(x_4, x_7) = (x_4, x_7)$, cu $m_{47} = 6$;
$d(x_4, x_8) = (x_4, x_7, x_8)$, cu $m_{48} = 12$.

3. Trecerea unui produs între diferite faze de prelucrare, într-o secție a unei întreprinderi, se face conform unei relații de ordonare, reprezentată prin graful din figura III.2.13 prin arce. Fiecare trecere de la o fază x_i la altă fază x_j, necesită cheltuieli de producție date sub forma elementului C_{ij}, trecut pe arcul (x_i, x_j).

Scanned with OKEN Scanner

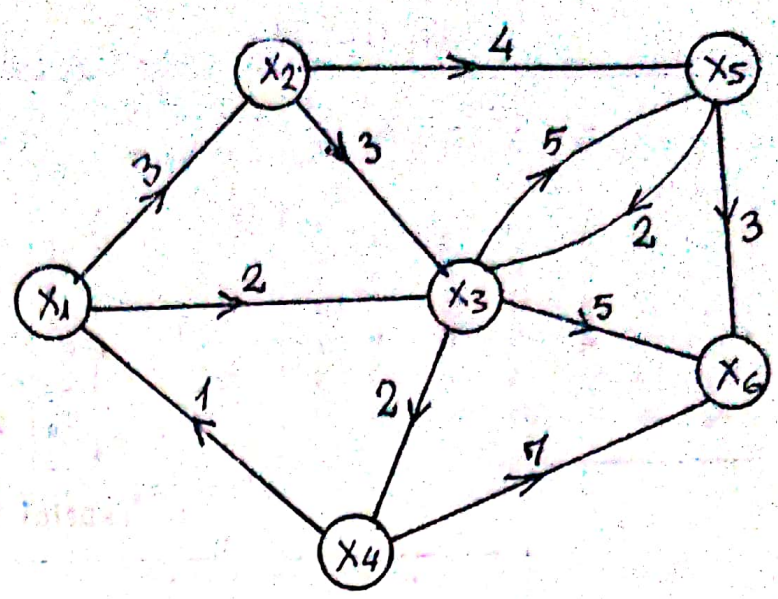


Fig. III.2.13

a) Care este matricea trecerilor între faze succesive cu cel mai mic cost de producţie?

b) Direcţia întreprinderii cere secţiei situaţia prelucrărilor cu cel mai mic cost de producţie între fazele x_1 şi x_6. Care sînt acestea?

Rezolvare. Pentru determinarea matricei M, a valorilor minime ale drumurilor dintre oricare două faze de prelucrare, aplicăm algoritmul, aritmeticii modificate,

În tabelul III.2.31 este scrisă matricea valorilor. Cu ajutorul acestei matrice, s-au calculat succesiv matricele $V^{(2)}$, $V^{(3)}$, $V^{(4)}$ şi $V^{(5)}$, folosind formulele:

$$V^{(2)} = V \tilde{*} V;\ V^{(3)} = V^{(2)} \tilde{*} V;\ V^{(4)} = V^{(3)} \tilde{*} V;$$

$$V^{(5)} = V^{(4)} \tilde{*} V.$$

Aceste matrice se află în tabelele III.2.32—III.2.35.

Tabelul III.2.31

a) V:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	3	2	∞	∞	∞
x_2	∞	0	3	∞	4	∞
x_3	∞	∞	0	2	5	5
x_4	1	∞	∞	0	∞	7
x_5	∞	∞	2	∞	0	3
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	0

Tabelul III.2.32

$V^{(2)}$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	3	2	4	7	7
x_2	∞	0	3	5	4	7
x_3	3	∞	0	2	5	5
x_4	1	4	3	0	∞	7
x_5	∞	∞	2	4	0	3
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	0

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul III.2.33

$V^{(3)}$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	3	2	4	7	7
x_2	6	0	3	5	4	7
x_3	3	6	0	2	5	5
x_4	1	4	3	0	8	7
x_5	5	∞	4	4	0	3
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	0

Tabelul III.2.34

$V^{(5)}$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	3	2	4	7	7
x_2	6	0	3	5	4	7
x_3	3	6	0	2	5	5
x_4	1	4	3	0	8	7
x_5	5	8	2	4	0	3
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	0

Tabelul III.2.35

$V^{(5)}$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	3	2	4	7	7
x_2	6	0	3	5	4	7
x_3	3	6	0	2	5	5
x_4	1	4	3	0	8	7
x_5	5	8	2	4	0	3
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	0

Avem $V^{(4)} \equiv V^{(5)} \equiv M$, adică valorile tuturor drumurilor de valori minime, corespunzînd trecerilor dintre faze succesive cu preţ de cost minim, sînt date de această matrice.

b) Trebuie determinat drumul de valoare minimă dintre x_1 şi x_6. Pentru aceasta, cercetăm arcele ce pleacă din x_1, ale căror valori sînt date de linia x_1 a matricei V şi le adunăm respectiv la valorile minime ce ajung în x_6, date de coloana x_6 a matricei M, reţinînd sumele minime. Facem aceste operaţii ca în schema următoare:

k	1	2	3	4	5	6
V_{1k}	0	3	2	∞	∞	∞
m_{k6}	7	7	5	7	3	0
$V_{1k} + m_{k6}$	7	10	7	∞	∞	∞

Găsim astfel arcul (x_1, x_3), cu $v_{13} = 2$, în drumul minim de la x_1 la x_6.

Rămîne să găsim drumul minim de la x_3 la x_6 de valoare $m_{36} = 5$:

$$x_1 \xrightarrow{2} x_3 \quad 5 \quad x_6$$

Scanned with OKEN Scanner

Cercetăm valorile arcelor care pleacă din x_3, date de linia a treia din V și le adunăm iarăși valorilor minime care ajung în x_6 (coloana a șasea din M), ca în schema:

k	1	2	3	4	5	6
V_{3k}			0	2	5	5
m_{k6}	7	7	5	7	3	0
$V_{3k} + m_{k6}$	∞	∞	5	9	8	5

Găsim astfel arcul (x_3, x_6), cu $V_{36} = 5$.
Drumul optim căutat este deci următorul:

$$x_1 \xrightarrow{2} x_3 \xrightarrow{5} x_6$$

Probleme date spre rezolvare

4. Un produs este adus într-o secție și supus la o serie de prelucrări, pentru îmbunătățirea calității principale. Operațiile de prelucrare ce se pot efectua, ordonarea lor între diferitele stări posibile ale produsului semifabricat, precum și costurile unitare asociate fiecărei prelucrări, sînt date în graful din figura III.2.14. Starea inițială fiind notată cu x_1, iar starea finală cu x_{10}, să se determine tehnologia (succesiunea de operații de prelucrare) cu cele mai mici cheltuieli totale.

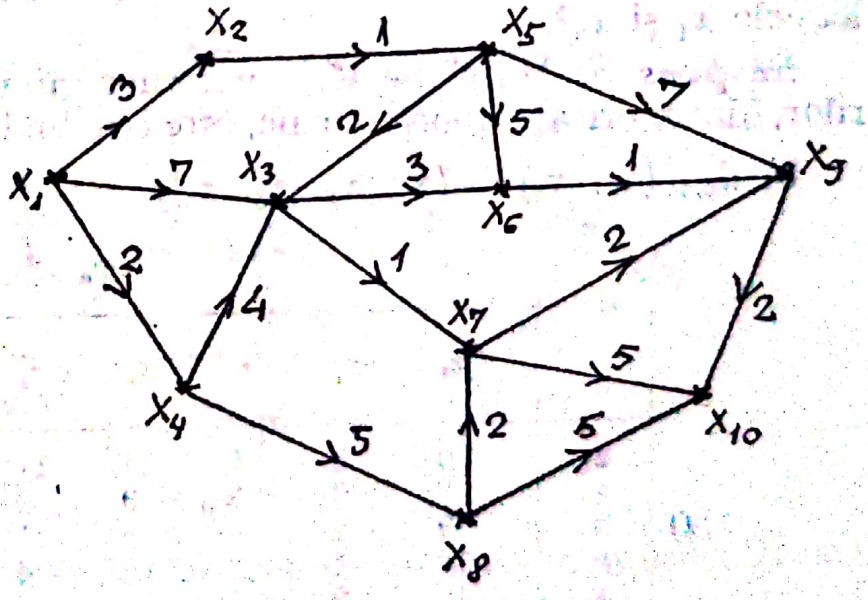


Fig. III.2.14

Răspuns. Există două tehnologii optime, ce corespund la următoarele două drumuri cu valoare minimă între x_1 și x_{10}:

$$d_1(x_1, x_{10}) = (x_1, x_2, x_5, x_2, x_7, x_9, x_{10}),$$
$$d_2(x_1, x_{10}) = (x_1, x_4, x_3, x_7, x_9, x_{10}).$$

Costul total este reprezentat prin valoarea minimă a acestor drumuri, egală cu $m_{1,10} = 11$.

5. Cele șase coloane dintr-un masiv muntos sînt legate prin poteci marcate, cronometrînd timpul de parcurgere și neglijînd variantele de legături cu un timp prea lung de parcurgere, din cauza dificultăților traseului. Imaginea geometrică a modelului care se asociază situației de pe teren este dată de graful din figura III.2.15.

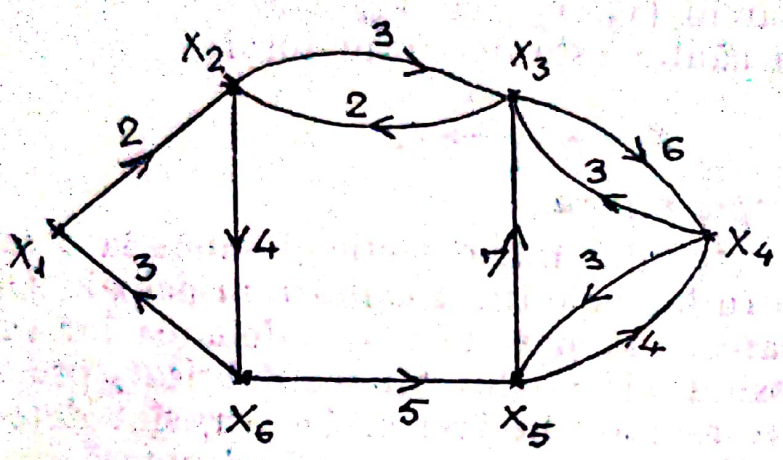


Fig. III.2.15

a) Să se determine traseele ce se pot parcurge în timp minim, dintre oricare două coloane, ce fac parte din sistemul dat.

b) Care este traseul cel mai scurt convenabil, dintre coloanele x_1 și x_5?

Răspuns. a) Matricea M, a valorilor minime ale drumurilor, dintre oricare două coloane, este cea din tabelul III.2.36.

b) $d_{min}(x_1, x_5) = (x_1, x_2, x_6, x_5)$.

Tabelul III.2.36

(M)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	2	5	11	11	6
x_2	7	0	3	9	9	4
x_3	9	2	0	6	11	6
x_4	12	5	3	0	14	9
x_5	16	9	7	4	0	13
x_6	8	5	8	9	5	0

6. Pentru a pompa apa de la gura de apă x_1 către secția x_6, unde este necesară producției, se studiază amplasarea unui sistem de canale cu patru puncte intermediare posibile

Scanned with OKEN Scanner

de repompare. Se cunosc costurile de instalație a canalelor. Modelul asociat este graful din figura III.2.16. Să se determine cel mai ieftin sistem de construire a canalelor, care să alimenteze secția x_6.

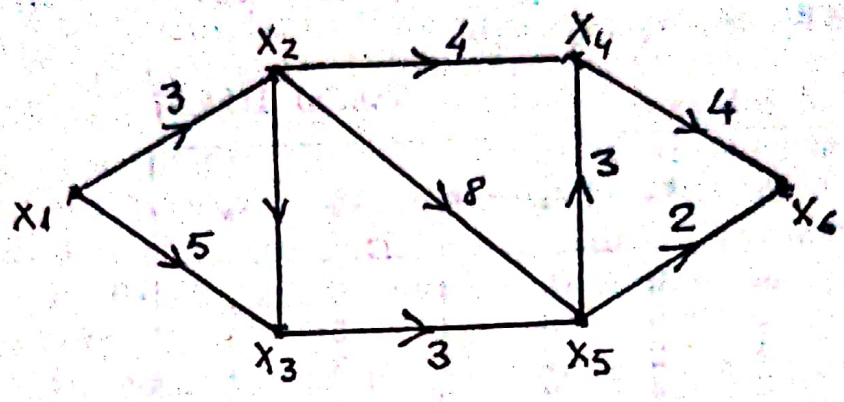


Fig. III.2.16

Răspuns. Se vor folosi canalele de pe unul dintre următoarele drumuri minime, de la x_1 la x_6:

$$d_1(x_1, x_6) = (x_1, x_2, x_3, x_5, x_6),\ d_2(x_1, x_6) = (x_1, x_3, x_5, x_6).$$

Costul total al instalației este: $m_{16} = 10$.

7. Pentru a transporta pe calea ferată un produs, se folosește un sistem de linii între șase localități și s-a cronometrat timpul pe fiecare porțiune de drum (în arc). S-a obținut graful din figura III.2.17. În funcție de solicitarea

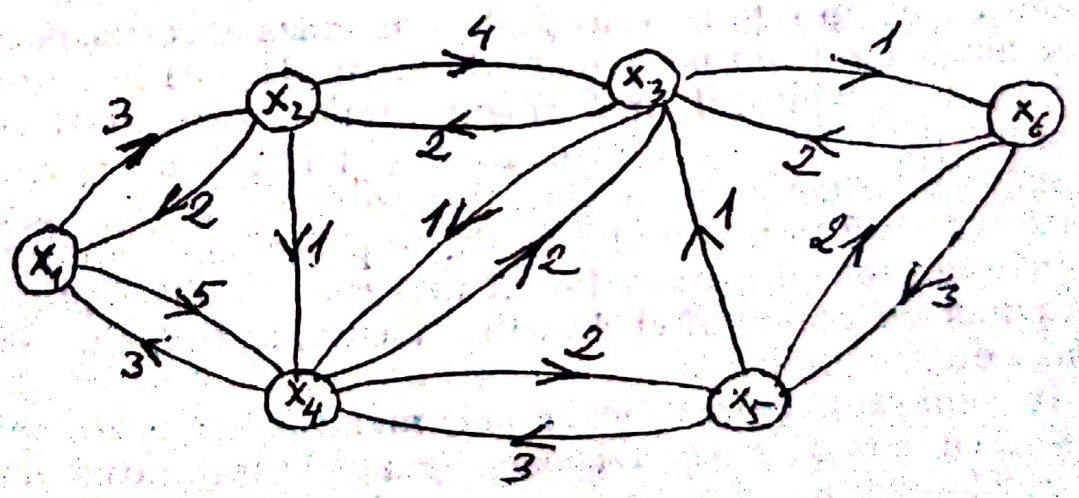


Fig. III.2.17

liniilor, panta liniei, alimentarea locomotivei, distanțele reale, acești timpi de parcurgere pot avea și valori diferite pentru sensurile contrare de mers. Să se determine care sînt timpii minimi de parcurgere pentru orice traseu între oricare două localități și să se decidă cum trebuie făcut transportul între x_1 și x_6.

Scanned with OKEN Scanner

Răspuns. Matricea valorilor minime a drumurilor dintre fiecare grupă de două vîrfuri ale grafului, este cea din tabelul III.2.37.

Pentru cazul localităților x_1 și x_6, traseul ce trebuie ales corespunde la timpul total $m_{16} = 7$ și este dat de drumul $d_{min}(x_1, x_6) = (x_1, x_2, x_4, x_3, x_6)$.

Tabelul III.2.37

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	3	6	4	6	7
x_2	2	0	3	1	3	4
x_3	4	2	0	1	3	1
x_4	3	4	2	0	2	3
x_5	5	3	1	2	0	2
x_6	6	4	2	3	3	0

III.3. Transport pe „trasee hamiltoniene"

Adesea, transportul unor produse trebuie organizat cu ajutorul unei rețele de transport cunoscute (un graf), astfel încît să se treacă prin toate punctele importante luate în considerație (prin toate vîrfurile grafului), netrecînd de două sau mai multe ori prin niciunul dintre acestea. De exemplu, putem fi puși în fața necesității de a organiza aprovizionarea unor magazine (cantine, puncte de lucru ale unei întreprinderi etc.) cu ajutorul unui singur camion, care să treacă succesiv pe la fiecare dintre acestea, folosind o rețea de comunicații cunoscute. În plus, dacă o astfel de organizare poate fi făcută în mai multe feluri, se poate pune problema găsirii unei soluții care să fie cît mai convenabilă (optimă) din punct de vedere al cheltuielilor făcute, al timpului consumat etc.

În problema dată ca exemplu, mai sus, se poate cere traseul cu care să se aprovizioneze punctele respective, fără a considera drumurile camionului de la și la garaj (caz în care problema este de determinare a unui drum hamiltonian — prescurtat DH), sau se poate lua în considerare și întoarcerea camionului în punctul de plecare (caz în care problema este de determinare a unui circuit hamiltonian, prescurtat CH). În plus, dacă se iau în considerare și costurile de transport, sîntem conduși la problema determinării unui drum hamiltonian de valoare minimă — prescurtat DHM, respec-

Scanned with OKEN Scanner

tiv la problema determinării unui circuit hamiltonian de valoare minimă — prescurtat CHM. În sfîrșit, dacă graful folosit este neorientat, denumirilor și notațiilor de mai sus le corespund următoarele: lanț hamiltonian (LH), ciclu hamiltonian (CH), lanț hamiltonian de valoare minimă (LHM), ciclu hamiltonian de valoare minimă (CHM).

Vom începe studiul sistematic al unora dintre problemele puse, cu problema determinării drumului hamiltonian (drumurilor hamiltoniene), într-un graf orientat și neevaluat. Determinarea acestor drumuri hamiltoniene se face în mod diferențiat, în grafuri fără circuite și în grafuri cu circuite.

a) *Problema drumurilor hamiltoniene în grafuri fără circuite*

În construcția matricei drumurilor triangularizate, D', am putut observa că primul element diferit de zero din fiecare linie, ca și ultimul element diferit de zero din fiecare coloană corespund la arce în graful dat, $G = (X, \gamma)$.

Teorema III.3.1—(Y. Chen). Fie $G = (X, \gamma)$ un graf orientat și fără circuite, cu n vîrfuri. Condiția necesară și suficientă pentru ca G să conțină un drum hamiltonian este ca numărul elementelor egale cu unu din matricea D, să fie:

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Demonstrație. Presupunem că există un drum hamiltonian: $DH=(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$ corespunzînd permutării $\begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots n \\ i_1 & i_2 \ldots i_n \end{pmatrix}$. Deoarece graful nu are circuite, rezultă că x_{i_1} atinge $(n-1)$ vîrfuri, deci pe linia lui x_{i_1} în matricea D sînt $(n-1)$ elemente egale cu unu. Vîrful x_{i_1} atinge $(n-2)$ vîrfuri, deci linia corespunzătoare lui din D are $(n-2)$ elemente egale cu unu ș.a.m.d., pentru fiecare vîrf al drumului hamiltonian numărul de elemente egale cu unu scade cu cîte o unitate, pînă la vîrful x_{i_n}, care este ultimul vîrf al drumului hamiltonian, deci are puterea de atingere zero (în caz contrar, graful nu ar corespunde ipotezei de a nu avea circuite). Deci numărul total de elemente egale cu unu în matricea D este suma unei progresii aritmetice cu rația unu, adică:

$$(n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Reciproc, presupunem că suma cifrelor de unu din D, sau suma puterilor de atingere, este $\frac{n(n-1)}{2}$. Considerăm forma triangularizată, D', în care notăm vîrfurile x'_1, x'_2, ..., x'_n, deduse prin permutarea elementelor $x_1, x_2, ..., x_n$ în ordinea descrescătoare a puterilor de atingere. În D' toate elementele egale cu unu se află deasupra diagonalei principale și cum deasupra diagonalei principale sînt $\frac{n(n-1)}{2}$ locuri, înseamnă că nici o cifră zero nu se află deasupra diagonalei principale. Putem scrie o succesiune de arce, corespunzînd primului element diferit de zero din fiecare linie: (x'_1, x'_2) (x'_2, x'_3), ..., (x'_{n-1}, x'_n), succesiune care formează un drum hamiltonian $DH = (x'_1, x'_2, ..., x'_n)$.

Teorema III.3.2. Într-un graf $G = (X, \gamma)$, orientat și fără circuite, dacă există un drum hamiltonian, acesta este unic.

Demonstrație. Fie $DH = (x'_1, x'_2, ..., x'_n)$, unde vîrfurile se succed în ordinea descrescătoare a puterilor de atingere. Orice altă succesiune a vîrfurilor conține cel puțin o inversare a indicilor. Presupunem prin absurd că ar exista cel puțin un arc de forma (x'_i, x'_j) cu $j < i$, adică linia x'_j precede linia x'_i în D', astfel că $d'_{ji} = 1$, deci situat deasupra diagonalei principale în D'. Deducem de aici existența unui drum $d(x'_j, x'_i)$. Cum însă succesiunea de sus conține drumul (x'_i, x'_j), rezultă că graful are circuit, contrar ipotezei. Deci presupunerea că în graf drumul hamiltonian nu este unic, este falsă.

Exemplu. Prelucrarea unui obiect artizanal poate trece prin șase faze distincte, notate într-un model de graf prin $x_i (i = 1, 2, ..., 6)$, iar posibilitățile de trecere de la o fază la alta sînt reprezentate prin arce (vezi figura III.3.1.). Este posibil ca obiectul să treacă prin toate fazele de prelucrare? Dacă acest lucru este posibil, să se indice tehnologia corespunzătoare.

Rezolvare. Matricea arcelor grafului dat este cea din tabelul III.3.1. Cu ajutorul ei s-a calculat matricea drumurilor, din tabelul III.3.2. Deoarece aceasta din urmă are numai zerouri pe diagonala principală, graful dat nu are circuite.

Scanned with OKEN Scanner

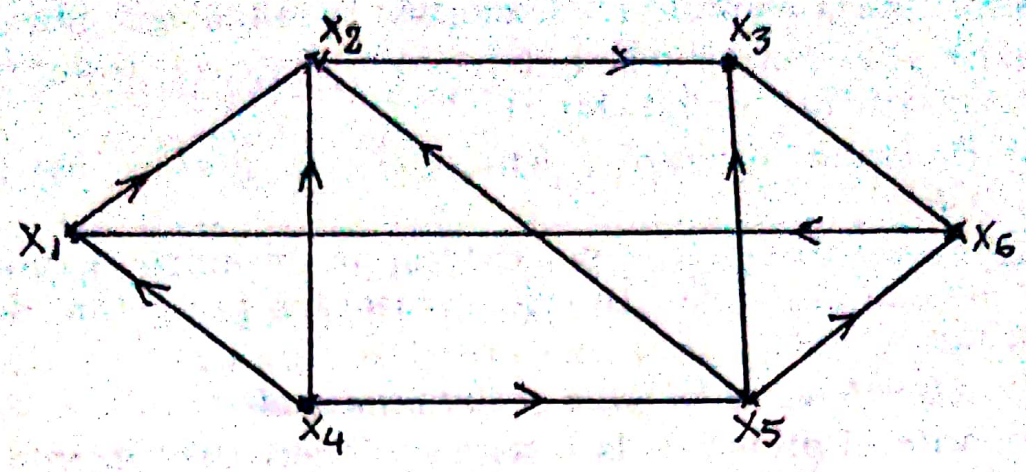


Fig. III.3.1

Tabelul III.3.1

(A):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	0	0	0	0
x_2	0	0	1	0	0	0
x_3	0	0	0	0	0	0
x_4	1	1	0	0	1	0
x_5	0	1	1	0	0	1
x_6	1	0	1	0	0	0

Tabelul III.3.2

(D):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$p(x_i)$
x_1	0	1	1	0	0	0	2
x_2	0	0	1	0	0	0	1
x_3	0	0	0	0	0	0	0
x_4	1	1	1	0	1	1	5
x_5	1	1	1	0	0	1	4
x_6	1	1	1	0	0	0	3
						$\sum p(x_i)$	15

Calculăm: $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15 = \sum_{i=1}^{6} p(x_i)$ ceea ce se observă direct, în tabelul III.3.2. Deci graful dat are un drum hamiltonian, anume:

$$DH = (x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3).$$

Tabelul III.3.3.

(D'):

	x_4	x_5	x_6	x_1	x_2	x_3
x_4	0	1	1	1	1	1
x_5	0	0	1	1	1	1
x_6	0	0	0	1	1	1
x_1	0	0	0	0	1	1
x_2	0	0	0	0	0	1
x_3	0	0	0	0	0	0

Scanned with OKEN Scanner

Succesiunea respectivă corespunde la tehnologia căutată.

Observație. Forma triangularizată a matricei drumurilor este reprezentată în tabelul III.3.3.

b) *Problema drumurilor hailtoniene în grafuri oarecare (cu circuite)*

În grafuri oarecare se pot determina drumurile hamiltoniene pe mai multe căi. În cele ce urmează prezentăm două algoritme uzuale.

1°. *Algoritmul ce folosește graful condensat*

Algoritmul pleacă de la o serie de observații evidente, în legătură cu graful condensat G^* și anume:

(i) Dacă într-un graf G există cel puțin un drum hamiltonian, atunci și graful său condensat, G^*, conține un astfel de drum. Drumul hamiltonian din G trebuie să parcurgă, succesiv, toate vîrfurile oricărei componente tare conexe, iar de la o componentă la alta ordinea este dictată de ordinea componentelor în drumul hamiltonian din G^*.

(ii) Dacă graful condensat G^* nu conține nici un drum hamiltonian, atunci nici graful G nu conține nici un drum hamiltonian. Această observație este negația logică a propoziției precedente.

(iii) Dacă graful condensat G^* conține un drum hamiltonian nu rezultă că și graful G conține drum hamiltonian în mod necesar. În funcție de legăturile directe (arcele din G) între componentele tare conexe, graful G poate să aibă sau poate să nu conțină drum hamiltonian.

Algoritmul de deducere a drumurilor hamiltoniene din G, prin reducerea la drumul hamiltonian din G^*, cere parcurgerea următoarelor etape:

Pas 1. Găsirea tuturor componentelor tare conexe. Fie mulțimea lor: $X^* = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$.

Pas. 2. Determinarea matricei arcelor A^* pentru G^* și matricei drumurilor D^*.

Pas. 3. Cercetarea existenței DH^* în G^*, pe baza teoremei Chen, verificînd egalitatea:

$$\sum_{i=1}^{k} p(C_i) = \frac{k(k-1)}{2}.$$

Pas 4. Dacă G^* nu conține un drum hamiltonian, atunci nici graful G nu conține un drum hamiltonian.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă G^* conține un drum hamiltonian, fie $DH^* = (C_1', C_2', \ldots, C_h')$: determinăm drumurile hamiltoniene din fiecare componentă tare conexă și le legăm prin arcele care leagă componentele succesive în toate modurile posibile. Cum am mai afirmat, în G poate să existe sau poate să nu existe drum hamiltonian, în funcție de aceste legături.

Exemplu. La un șantier hidroenergetic trebuie livrate materiale de construcții în cinci puncte de lucru. Aceste puncte de lucru au fost legate prin niște căi de acces, croite după posibilitățile permise de teren, ca în graful din figura III.3.2. Se pune problema dacă basculantele pot trece pe la toate punctele de lucru să descarce materialele necesare.

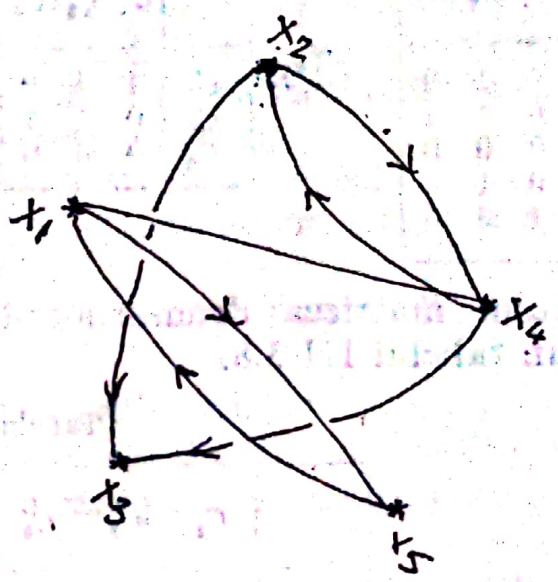


Fig. III.3.2

Rezolvare. Graful are circuite. Să aplicăm algoritmul bazat pe construirea grafului condensat. În tabelul III.3.4 sînt efectuate calculele pentru determinarea componentelor tare conexe.

Tabel III.3.4.

(A):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	V_1'	V_2'
x_1	0	0	0	1	1	1	
x_2	0	0	1	1	0	0	1
x_3	0	0	0	0	0	0	0
x_4	0	1	1	0	0	0	1
x_5	1	0	0	0	0	1	
V_1	1	1	1	1	1		
V_2		1	1	1			

Scanned with OKEN Scanner

Avem:

$$C_1 = C_{(x_1)} : (V_1 \; V_1') \cup \{x_1\} = \{x_1, x_5\},$$
$$C_2 = C_{(x_2)} : (V_2 \cap V_2') \cup \{x_2\} = \{x_2, x_4\},$$
$$C_3 = C_{(x_3)} : \{x_3\}.$$

Deci $G^* = (X^*, \gamma^*)$, unde $X^* = \{C_1, C_2, C_3\}$.

Cu ajutorul matricelor intermediare din tabelele III.3.5 și III.3.6, determinăm matricea A^* din tabelul III.3.7. Avem deci: $\gamma^* = \{(C_1, C_2), (C_2, C_3)\}$.

Tabelul III.3.5

(A):

	C_1	C_2	C_3
x_1	1	1	0
x_2	0	1	1
x_3	0	0	0
x_4	0	1	1
x_5	1	0	0

Tabelul III.3.6

$(\widetilde{A}^*)$:

	C_1	C_2	C_3
C_1	1	1	0
C_2	0	1	1
C_3	0	0	0

Tabelul III.3.7

(A^*):

	C_1	C_2	C_3
C_1	0	1	0
C_2	0	0	1
C_3	0	0	0

Construim matricea drumurilor în G^*, cu algoritmul Chen, ca în tabelul III.3.8.

Tabelul III.3.8.

(D^*):

	C_1	C_2	C_3	$p(C_i)$
C_1	0	1	1	2
C_2	0	0	1	1
C_3	0	0	0	0

$$\sum_{i=1}^{3} p(C_i) = 2 + 1 + 0 = 3 = \frac{3 \cdot 2}{2}$$

(graful condensat are $n^* = 3$ vîrfuri), în graful condensat există drumul hamiltonian ce urmează:

$$DH^* = (C_1, C_2, C_3),$$

Grafic, avem descompunerea grafului dat, ca în figura III.3.3.

Ținînd seama și de arcele ce leagă componentele consecutive din DH^*, reprezentate în figura III.3.3, rezultă că există și în graful inițial un drum hamiltonian, anume:

$$DH = (x_5, x_1, x_4, x_2, x_3).$$

Scanned with OKEN Scanner

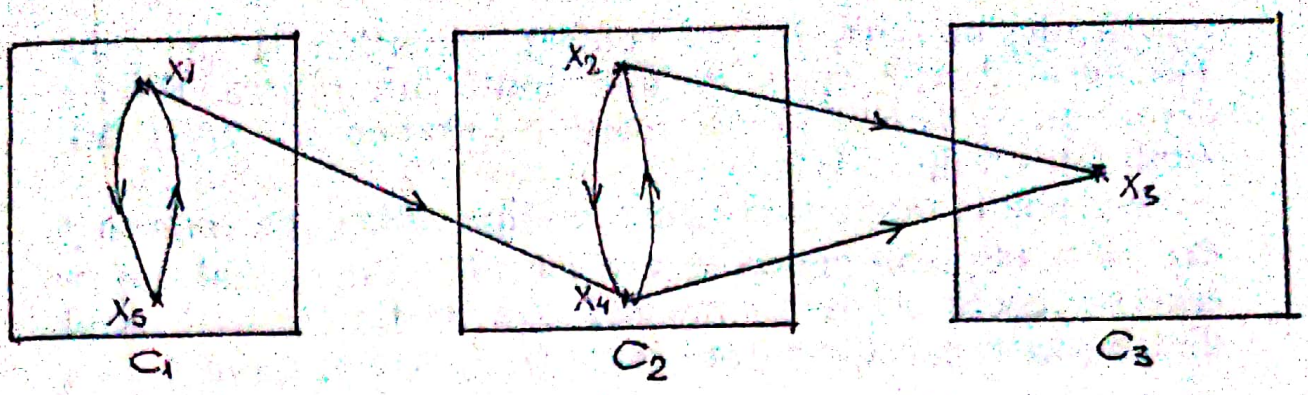


Fig. III.3.3

Acesta este drumul pe care urmează să îl facă basculantele, pentru a trece pe la toate punctele.

2°. *Algoritmul lui Kaufmann (produs latin)*

Fie un graf oarecare $G = (X, \gamma)$. Construim matricele latine $\mathcal{M}^{(1)}, \mathcal{M}^{(2)}, \ldots, \mathcal{M}^{(n-1)}$, matrice pătrate de ordinul n, dacă graful are n noduri (vîrfuri).

Matricea $\mathcal{M}^{(1)}$ se construieşte astfel:

— dacă $(x_i, x_j) \in \gamma$, atunci punem secvenţa $x_i\, x_j$ în căsuţa (i, j) a matricei $\mathcal{M}^{(1)}$,

— dacă $(x_i, x_j) \notin \gamma$, atunci punem 0 sau $\emptyset$ în căsuţa (i, j) a matricei.

Formăm $\widetilde{\mathcal{M}}^{(1)}$ din $\mathcal{M}^{(1)}$, prin ştergerea primului vîrf al secvenţei $x_i x_j$ din orice căsuţă (i, j). Rezultă că matricea $\widetilde{\mathcal{M}}^{(1)}$ conţine vîrfurile care pot fi atinse prin arce de la fiecare vîrf al grafului.

Succesiv, construim matricele: $\mathcal{M}^{(2)}, \mathcal{M}^{(3)}, \ldots, \mathcal{M}^{(n-1)}$, care vor da drumurile elementare între orice două vîrfuri, formate din 2, 3, ..., respectiv $(n-1)$ arce, aşa dar matricea $\mathcal{M}^{(n-1)}$ va conţine toate drumurile hamiltoniene. În general, definim:

$$\mathcal{M}^{(k)} = \mathcal{M}^{(k-1)} \,\mathrm{L}\, \widetilde{\mathcal{M}}^{(1)}, \quad k = 2, 3, \ldots, n-1,$$

semnul L reprezentînd „produsul latin", ce se efectuează în modul următor:

— în căsuţa (i, j) a matricei $\mathcal{M}^{(k)}$ se trece „produsul latin" al liniei i din matricea $\mathcal{M}^{(k-1)}$, prin coloana j din matricea $\widetilde{\mathcal{M}}^{(1)}$,

— dacă la înmulţirea liniei i a lui $\mathcal{M}^{(k-1)}$, cu coloana j a lui $\widetilde{\mathcal{M}}^{(1)}$, urmează să înmulţim secvenţa $(x_i, x_h, \ldots, x_s)$ cu vîrful x_j, scriem în căsuţa (i, j) a lui $\mathcal{M}^{(k)}$, secvenţa $(x_i, x_h, \ldots, x_s, x_j)$ numai dacă în această secvenţă nu se

Scanned with OKEN Scanner

repetă nici un vîrf, în caz contrar renunțînd la ea; dacă asemenea situație apare de mai multe ori, pentru aceeași căsuță (i, j) scriem în ea toate rezultatele de acest fel, unul sub altul,

— dacă la înmulțirea liniei i din $\mathcal{M}^{(k-1)}$, cu coloana j din $\mathcal{M}^{(1)}$, obținem numai secvențe completate ca mai sus, în care se repetă cel puțin un vîrf, sau de fiecare dată unul dintre „factori" este nul, în căsuța (i, j) scriem 0 sau $\emptyset$.

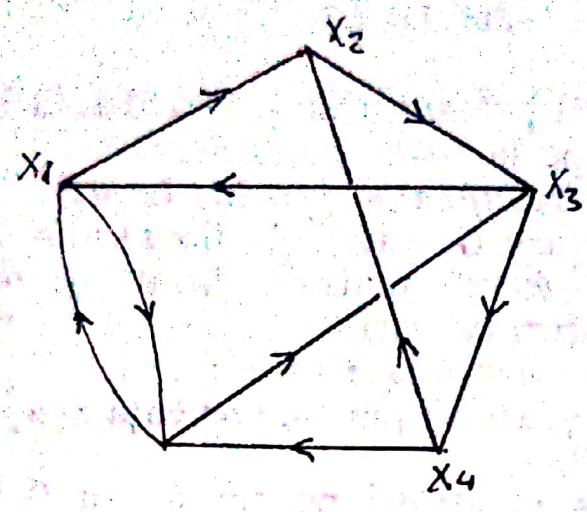


Fig. III.3.4

Vom face o justificare intuitivă a algoritmului, pe baza unui exemplu, folosind graful din figura III.3.4. Matricea $\mathcal{M}^{(1)}$, ce conține posibilitățile de a ajunge cu un singur arc, între oricare două vîrfuri ale grafului, este cea din tabelul III.3.9. Să observăm că în fiecare căsuță (i, j), a acestei matrice, se găsește sau secvența $x_i x_j$ (dacă graful conține arc de la x_i la x_j), sau $\emptyset$ (în caz contrar). Astfel, trecerea greșită a unei secvențe, în altă căsuță decît cea corespunzătoare ei, s-ar observa imediat. De exemplu, dacă secvența $x_1 x_2$ nu ar fi fost trecută în căsuța (1, 2), de pe linia lui x_1 și coloana x_2, tabelul ar fi conținut o greșeală.

Tabelul III.3.9.

$\mathcal{M}^{(1)}$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$\emptyset$	x_1x_2	$\emptyset$	$\emptyset$	x_1x_5
x_2	$\emptyset$	$\emptyset$	x_2x_3	$\emptyset$	$\emptyset$
x_3	x_3x_1	$\emptyset$	$\emptyset$	x_3x_4	$\emptyset$
x_4	$\emptyset$	x_4x_2	$\emptyset$	$\emptyset$	x_4x_5
x_5	x_5x_1	$\emptyset$	x_5x_3	$\emptyset$	$\emptyset$

Scanned with OKEN Scanner

Atenție! În căsuța (i, j), a matricei $\mathcal{M}^{(1)}$ sînt trecute toate drumurile de la x_i la x_j, de cîte un singur arc.

Matricea $\tilde{\mathcal{M}}^{(1)}$ este cea din tabelul III.3.10, ea fiind obținută din $\mathcal{M}^{(1)}$ prin suprimarea primului vîrf, de la fiecare secvență de vîrfuri. Și aci observăm că în orice căsuță de pe coloana x_j nu poate fi decît $\emptyset$ sau vîrful x_j: în căsuța de ordin j a coloanei, se găsește x_j, dacă graful conține arcul (x_i, x_j) și $\emptyset$ în caz contrar. Înseamnă că matricea $\tilde{\mathcal{M}}^{(1)}$ conține eventualele prelungiri de drumuri cu cîte un arc, primul vîrf al arcului fiind suprimat pentru a nu se repeta în secvența (drumul) următoare.

Tabelul III.3.10

$\tilde{\mathcal{M}}^{(1)}$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$\emptyset$	x_2	$\emptyset$	$\emptyset$	x_5
x_2	$\emptyset$	$\emptyset$	x_3	$\emptyset$	$\emptyset$
x_3	x_1	$\emptyset$	$\emptyset$	x_4	$\emptyset$
x_4	$\emptyset$	x_2	$\emptyset$	$\emptyset$	x_5
x_5	x_1	$\emptyset$	x_3	$\emptyset$	$\emptyset$

Produsul latin $\mathcal{M}^{(2)} = \mathcal{M}^{(1)}$ L $\tilde{\mathcal{M}}^{(1)}$ este realizat în tabelul III.3.11. Să observăm că în căsuța (i, j), a acestui tabel, se găsesc secvențe de cîte trei vîrfuri diferite, fiecare reprezentînd cîte un drum elementar de două arce, de la vîrful x_i, la vîrful x_j. Dăm, în continuare, cîteva exemple de calcul,

Tabelul III.3.11

$\mathcal{M}^{(2)}$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$x_1x_2x_3$ $x_1x_5x_3$	$\emptyset$	$\emptyset$
x_2	$x_2x_3x_1$	$\emptyset$	$\emptyset$	$x_2x_3x_4$	$\emptyset$
x_3	$\emptyset$	$x_3x_1x_2$ $x_3x_4x_2$	$\emptyset$	$\emptyset$	$x_3x_1x_5$ $x_3x_4x_5$
x_4	$x_4x_5x_1$	$\emptyset$	$x_4x_3x_2$ $x_4x_5x_3$	$\emptyset$	$\emptyset$
x_5	$x_5x_3x_1$	$x_5x_1x_2$	$\emptyset$	$x_5x_3x_4$	$\emptyset$

Scanned with OKEN Scanner

pentru aceste drumuri. Astfel, înmulțind latin linia x_1 din $\mathcal{M}^{(1)}$, cu coloana x_1, din $\widetilde{\mathcal{M}}^{(1)}$, avem:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$\emptyset$	x_1x_2	$\emptyset$	$\emptyset$	x_1x_5

x_1

x_1	$\emptyset$	$\emptyset$	cu	$\emptyset$	$\rightarrow \emptyset,$
x_2	$\emptyset$	x_1x_2	cu	$\emptyset$	$\rightarrow \emptyset,$
x_3	x_1	$\emptyset$	cu	x_1	$\rightarrow \emptyset,$
x_4	$\emptyset$	$\emptyset$	cu	$\emptyset$	$\rightarrow \emptyset,$
x_5	x_1	x_1x_5	cu	x_1	$\rightarrow x_1x_5x_1.$

A apărut o singură secvență de trei vîrfuri, la care renunțăm, deoarece se repetă vîrful x_1; această secvență reprezintă de fapt un circuit ce trece prin vîrful x_1. Ca urmare, în căsuța (1, 1) din matricea $\mathcal{M}^{(2)}$, a apărut $\emptyset$.

Înmulțind latin linia x_1 din $\mathcal{M}^{(1)}$, cu coloana x_3 din $\widetilde{\mathcal{M}}^{(1}$, avem:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$\emptyset$	x_1x_2	$\emptyset$	$\emptyset$	x_1x_5

x_3

x_1	$\emptyset$	$\emptyset$	cu	$\emptyset$	$\rightarrow \emptyset,$
x_2	x_3	x_1x_2	cu	x_3	$\rightarrow x_1x_2x_3$
x_3	$\emptyset$	$\emptyset$	cu	$\emptyset$	$\rightarrow \emptyset,$
x_4	$\emptyset$	$\emptyset$	cu	$\emptyset$	$\rightarrow \emptyset,$
x_5	x_3	x_1x_5	cu	x_3	$\rightarrow x_1x_5x_3.$

Deoarece au apărut două secvențe de cîte trei vîrfuri distincte, în căsuța (1, 3) a matricei $\mathcal{M}^{(2)}$ au fost trecute amîndouă. Ele reprezintă cele două drumuri posibile, de cîte două arce, de la x_1 la x_3. Cititorul este rugat să le observe și pe graful din figura III.3.4. În plus, din modul cum au apărut ele, se poate observa cum funcționează înmulțirea latină:

— secvența x_1x_2 se prelungește cu vîrful x_3, adică drumul de un arc (x_1, x_2) se continuă cu arcul (x_2, x_3), suprimarea lui x_2 în $\widetilde{\mathcal{M}}^{1)}$ fiind necesară pentru ca el să nu se repete în secvența $x_1x_2x_3$,

— secvența x_1x_5 se prelungește, de asemenea, cu vîrful x_3 (pe coloana x_3 din $\widetilde{\mathcal{M}}^{(1)}$ nu poate fi decît x_3), ducînd la drumul de două arce (x_1, x_5, x_3).

Din cele de mai sus, rezultă că matricea $\mathcal{M}^{(2)}$ conține toate drumurile elementare de cîte două arce, între oricare

Scanned with OKEN Scanner

două vîrfuri ale grafului. În mod analog, matricea $\mathcal{M}^{(3)} = \mathcal{M}^{(2)} \mathrm{L} \tilde{\mathcal{M}}^{(1)}$, din tabelul III.3.12, conține drumurile elementare de cîte trei arce, din graful dat. Dăm și aci trei exemple de calcul. Produsul latin între linia x_1 din $\mathcal{M}^{(2)}$ și coloana x_4 din $\tilde{\mathcal{M}}^{(1)}$ se face astfel:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$x_1x_2x_3$ $x_1x_5x_3$	$\emptyset$	$\emptyset$

x_1	$\emptyset$
x_2	$\emptyset$
x_3	x_4
x_4	$\emptyset$
x_5	$\emptyset$

$\emptyset$ cu $\emptyset \to \emptyset$,
$\emptyset$ cu $\emptyset \to \emptyset$,
$x_1x_2x_3$ cu $x_4 \to x_1x_2x_5x_4$
$x_1x_5x_3$ $\qquad\qquad\quad x_1x_5x_3x_4$
$\emptyset$ cu $\emptyset \to \emptyset$,
$\emptyset$ cu $\emptyset \to \emptyset$.

Tabelul III.3.12

$\mathcal{M}^{(3)}$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$x_1x_2x_3x_4$ $x_1x_5x_3x_4$	$\emptyset$
x_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$x_2x_3x_1x_5$ $x_2x_3x_4x_5$
x_3	$x_3x_4x_5x_1$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
x_4	$x_4x_2x_3x_1$ $x_4x_5x_3x_1$	$x_4x_5x_1x_2$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
x_5	$\emptyset$	$x_5x_3x_1x_2$ $x_5x_3x_4x_2$	$x_5x_1x_2x_3$	$\emptyset$	$\emptyset$

După cum se vede, dacă într-o căsuță sînt două secvențe, ele se pot prelungi separat, dacă nu se va repeta nici un vîrf de fiecare dată, Produsul latin dintre linia x_2 din $\mathcal{M}^{(2)}$ și coloana x_5 din $\tilde{\mathcal{M}}^{(1)}$ se face astfel:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	$x_2x_3x_1$	$\emptyset$	$\emptyset$	$x_2x_3x_4$	$\emptyset$

x_1	x_5
x_2	$\emptyset$
x_3	$\emptyset$
x_4	x_5
x_5	$\emptyset$

$x_2x_3x_1$ cu $x_5 \to x_2x_3x_1x_5$,
$\emptyset$ cu $\emptyset \to \emptyset$,
$\emptyset$ cu $\emptyset \to \emptyset$,
$x_2x_3x_4$ cu $x_5 \to x_2x_3x_4x_5$,
$\emptyset$ cu $\emptyset \to \emptyset$.

Au apărut astfel două secvențe de cîte patru vîrfuri distincte, deci ambele se vor trece în căsuța (2, 5) din matricea $\mathcal{M}^{(3)}$,

Scanned with OKEN Scanner

În sfîrșit, dăm exemplul înmulțirii latine a liniei x_3 din $\mathcal{M}^{(2)}$, cu coloana x_1 din $\tilde{\mathcal{M}}^{(1)}$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	$\emptyset$	$x_3x_1x_2$ $x_3x_4x_2$	$\emptyset$	$\emptyset$	$x_3x_1x_5$ $x_3x_4x_5$

	x_1	
x_1	$\emptyset$	$\emptyset$ cu $\emptyset \to \emptyset$,
x_2	$\emptyset$	$\begin{cases} x_3x_1x_2 \\ x_3x_4x_2 \end{cases}$ cu $\emptyset \to \emptyset$,
x_3	x_1	$\emptyset$ cu $x_1 \to \emptyset$,
x_4	$\emptyset$	$\emptyset$ cu $\emptyset \to \emptyset$,
x_5	x_1	$\begin{cases} x_3x_1x_5 \\ x_3x_4x_5 \end{cases}$ cu $x_1 \to \begin{cases} x_3x_1x_5x_1 \\ x_3x_4x_5x_1 \end{cases}$

Dintre cele două secvențe apărute, s-a păstrat numai cea de a doua, în prima fiind repetat vîrful x_1 (drumul corespunzător nu este elementar). Secvența pătrată a fost trecută în căsuța (3, 1) din $\mathcal{M}^{(3)}$.

Tabelul III.3.13 conține matricea $\mathcal{M}^{(4)} = \mathcal{M}^{(3)} \, L \, \tilde{\mathcal{M}}^{(1)}$, în care se află drumurile elementare de cîte patru arce, deci drumurile hamiltoniene din graful dat. Este evident că orice încercare de prelungire a acestor drumuri conduce numai la drumuri neelementare (se repetă de fiecare dată cel puțin un vîrf), deci la o matrice nulă.

Ca urmare a calculelor efectuate mai sus, rezultă că graful din figura III.3.4 are opt drumuri hamiltoniene date de secvențele de vîrfuri din tabelul III.3.13.

Tabelul III.3.13

$\mathcal{M}^{(4)}$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$\emptyset$	$x_1x_5x_3x_4x_2$	$\emptyset$	$\emptyset$	$x_1x_2x_3x_4x_5$
x_2	$x_2x_3x_4x_5x_1$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
x_3	$\emptyset$	$x_3x_4x_5x_1x_2$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
x_4	$\emptyset$	$x_4x_5x_3x_1x_2$	$x_4x_3x_1x_2x_3$	$\emptyset$	$x_4x_2x_3x_1x_5$
x_5	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$x_5x_1x_2x_3x_4$	$\emptyset$

Observații asupra algoritmului. 1. Pentru o simplificare a scrierii, putem să înlocuim secvențele de vîrfuri prin secvențele corespunzătoare de indici. De exemplu, în loc de $x_1x_2x_3$, putem scrie pe scurt 123. În același scop, vîrfurile se puteau nota inițial prin litere, de exemplu, prin A, B, C, D, ..., secvența amintită fiind notată prin ABC. De altfel, de la astfel de notații vine și numele de „produs latin".

Scanned with OKEN Scanner

2. Algoritmul poate fi folosit și la determinarea circuitelor hamiltoniene, continuînd cu încă un pas al aplicării lui și păstrînd numai secvențele care se încheie cu același vîrf cu care încep. Astfel, în exemplu de mai sus, efectuînd produsul: $\mathcal{M}^{(5)} = \mathcal{M}^{(4)} \, \mathrm{L} \, \widetilde{\mathcal{M}}^{(1)}$, dar păstrînd secvențele de tipul amintit, se obține circuitul $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1)$, sub cinci forme (începînd cu oricare dintre vîrfurile intermediare). Să observăm că la acest pas ne interesează numai secvențele ce vor apare pe diagonala principală.

3. Dacă nu ne interesează matricele intermediare $\mathcal{M}^{(k)}$, ci numai $\mathcal{M}^{(n-1)}$ (n numărul de vîrfuri ale grafului), se poate aplica și o prescurtare de calcul. Astfel, definind pe $\widetilde{\mathcal{M}}^{(k)}$ ca matricea obținută din $\mathcal{M}^{(k)}$, prin suprimarea primului vîrf de la fiecare secvență a sa, putem scrie și verifica ușor pe exemple:

$$\mathcal{M}^{(4)} = \mathcal{M}^{(2)} \, \mathrm{L} \, \widetilde{\mathcal{M}}^{(2)}; \quad \mathcal{M}^{(8)} = \mathcal{M}^{(4)} \, \mathrm{L} \, \widetilde{\mathcal{M}}^{(4)} \text{ etc.}$$

Evident, vom face asemenea prescurtări evitînd depășirea lui $\mathcal{M}^{(n-1)}$, în caz contrar obținînd o matrice nulă. De exemplu, pentru un graf cu opt vîrfuri, vom efectua operațiile în ordinea următoare: $\mathcal{M}^{(2)} = \mathcal{M}^{(1)} \, \mathrm{L} \, \widetilde{\mathcal{M}}^{(1)}$; $\mathcal{M}^{(4)} = \mathcal{M}^{(2)} \, \mathrm{L} \, \widetilde{\mathcal{M}}^{(2)}$; $\mathcal{M}^{(6)} = \mathcal{M}^{(4)} \, \mathrm{L} \, \widetilde{\mathcal{M}}^{(2)}$; $\mathcal{M}^{(7)} = \mathcal{M}^{(6)} \, \mathrm{L} \, \widetilde{\mathcal{M}}^{(1)}$. Matricea $\mathcal{M}^{(7)}$ va da toate drumurile hamiltoniene din vîrful cercetat.

Dăm, ca exemplu, în tabelul III.3.14, matricea $\widetilde{\mathcal{M}}^{(2)}$, cu ajutorul căreia cititorul este rugat să regăsească direct $\mathcal{M}^{(4)}$. Produsul latin a două secvențe va fi făcut, în acest caz, prin alăturarea lor, ținînd seama de ordine (prelungirea unei secvențe cu altă secvență, nu cu un vîrf).

Tabelul III.3.14

$\widetilde{\mathcal{M}}^{(2)}$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	0	x_2x_3 x_5x_3	0	0
x_2	x_3x_1	0	0	x_3x_4	0
x_3	0	x_1x_2 x_4x_2	0	0	x_1x_5 x_4x_5
x_4	x_3x_1	0	x_2x_3 x_5x_2	0	0
x_5	x_3x_1	x_1x_2	0	x_3x_4	0

Scanned with OKEN Scanner

4. Algoritmul produsului latin este foarte general, aplicabil grafurilor cu sau fără circuite, dar este greu de aplicat pentru un graf cu un număr mare de vîrfuri, datorită scrierii unor secvențe lungi și în număr mare, în căsuțele matricelor. De aceea, propunem aplicarea prealabilă a algoritmului ce folosește componentele tare conexe, urmînd ca în aceste componente să se determine drumurile hamiltoniene cu ajutorul produsului latin. De altfel, în exemplul luat mai sus, graful este tare conex și deci are o singură componentă tare conexă, ceea ce impune determinarea drumurilor hamiltoniene numai cu metoda produsului latin.

Continuăm studiul traseelor hamiltoniene în grafuri orientate, cu problema determinării unui ciclu hamiltonian de valoare minimă (CHM) într-un graf complet (care conține toate arcele posibile, adică între oricare două vîrfuri există două arce de sensuri contrare). Fie $G = (X, \gamma, v)$ un graf orientat cu n vîrfuri, în care mulțimea γ conține toate arcele (x_1, x_j), cu $x_i, x_j \in X$. Graful este evaluat, funcția $v : \gamma \to R^+$ avînd valori ce le vom nota convențional, astfel:

$$v(x_i, x_j) = c_{ij}, \text{ pentru } (x_i, x_j) \in \gamma.$$

Valorile c_{ij} reprezintă „costurile deplasării pe arce, între vîrfurile corespunzătoare, x_i și x_j.

Se poate deduce cu ușurință că numărul de trasee, reprezentînd circuite hamiltoniene în graful G, este egal cu $(n - 1)!$ Dintre acestea, trebuie găsit cel care are valoarea cea mai mică, respectiv cele (dacă sînt mai multe) cu valori minime. Prezentăm, în cele de mai jos, un algoritm pentru aceasta, în care se folosește un procedeu de ramificare a cazurilor ce apar pe parcurs. Figura obținută în urma acestor ramificări poartă numele de arborescență. O arborescență are un vîrf de plecare, numit sursă (rădăcină), de la care pleacă arce spre anumite vîrfuri; de la fiecare dintre aceste vîrfuri pornesc, de asemenea, arce spre alte vîrfuri ș.a.m.d., ultimele vîrfuri la care se ajunge fiind așa-numitele vîrfuri (noduri) terminale ale arborescenței.

Algoritmul lui Little

Fie $S(0)$ mulțimea tuturor itinerariilor posibile din G, deci avînd $(n - 1)!$ trasee, reprezentînd circuite hamiltoniene. Little și colaboratorii săi (Murty, Karel și Sweeney) au pornit de la ideea folosirii unei matrici de „costuri transformate", matricea $c_{ij}^{\bullet}$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$, cu proprietatea că

Scanned with OKEN Scanner

are cel puțin un zero pe fiecare linie și pe fiecare coloană. Evident, dacă s-ar putea găsi un circuit hamiltonian avînd numai „costuri transformate" nule, acesta ar fi un circuit optim, al cărui „cost", r, ar fi suma totală a reducerilor făcute (minoranții pe linii și coloane), din matricea inițială, ca la metoda repartizării de la problemele de alocări. Fiecare circuit hamiltonian din $S(0)$ va costa, deci, cel puțin r. Mulțimea $S(0)$ se partiționează în două submulțimi disjuncte și se calculează cîte o margine inferioară pentru fiecare din ele. Într-o etapă oarecare a algoritmului se alege submulțimea cu margine inferioară mai mică și se împarte în două submulțimi disjuncte, pînă la obținerea unei submulțimi care conține un singur circuit hamiltonian (traseu), al cărui „cost" este marginea sa inferioară și este deci drumul optim (celelalte circuite hamiltoniene au margini inferioare mai mari). Este vorba, deci, de un procedeu de separare și evaluare progresivă (P.S.E.P.) sau „branch and bound" (ramifică și mărginește), constînd din construirea unei arborescențe, în care succesorii fiecărui mod se stabilesc în funcție de evaluarea unei margini inferioare a drumurilor respective, adică în orice etapă se continuă construcția arborescenței alegînd ca punct de ramificație al arborescenței, vîrful cu cea mai mică margine inferioară a costurilor, pînă la obținerea unui circuit hamiltonian optim.

Descrierea algoritmului lui Little

Fie $C = \| C_{ij} \|$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, matricea „costurilor". Condiția ca un vîrf atins într-un drum să fie părăsit, pentru ca drumul să fie continuat spre alte vîrfuri, se va realiza prin condiția matematică $C_{ij} = \infty$.

Pasul 1. Se deduce matricea „costurilor transformate: $\| C_{ij}^{\bullet} \|$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, astfel:

— se aleg minoranții pe linii din matricea C: $\alpha_i = \min_{i \leqslant j \leqslant n} C_{ij}$ și se deduce matricea: $C' = \| C'_{ij} \|$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, cu elementele $C'_{ij} = C_{ij} - \alpha_i$, $j = 1, 2, \ldots, n$, deci matricea în care fiecare linie are cel puțin un element nul;

— se aleg minoranții pe coloanele matricei C', adică $\beta_j = \min_{i \leqslant j \leqslant n} (C'_{ij})$ și se scad din elementele fiecărei coloane, obținînd $C_{ij}^{\bullet} = C'_{ij} - \beta_j$, $i = 1, 2, \ldots, n$, deci cel puțin un element nul în fiecare coloană.

Scanned with OKEN Scanner

Matricea redusă este:

$$C^* = \| C^*_{ij} \|, \; i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

iar „reducerea totală" este $r = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j$.

Pasul 2. Pentru fiecare element $C^*_{hk} = 0$ se înregistrează penalitatea p_{hk}, corespunzătoare nefolosirii acestui element, pornind de la următorul raționament: dacă nu folosim arcul (x_h, x_k), trebuie să folosim un alt element din linia h și un anumit element din coloana k, așa încît, costul nefolosirii arcului (x_h, x_k) va fi cel puțin egal cu suma celor mai mici „costuri transformate" din linia h și coloana k, exceptînd pe C^*_{hk}, adică:

$$p_{hk} = \min_{j \neq k} \{C^*_{hj}\} + \min_{i \neq h} \{C^*_{ik}\}$$

Se înregistrează penalitatea p_{hk} în fiecare celulă în care $C^*_{hk} = 0$, într-un colț, ca în schema din figura III.3.5.

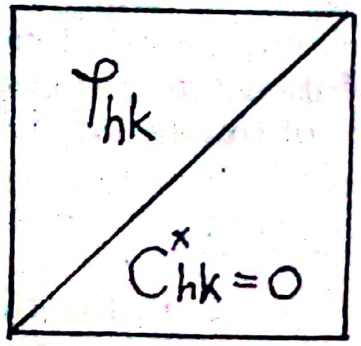


Fig. III.3.5

Pasul 3. Se alege celula cu penalitatea maximă; fie aceasta (h, k), adică:

$$p_{hk} = \max_{c^*_{ij} = 0} \{p_{ij}\}$$

Dacă există mai multe celule cu penalitate maximă, egală, se alege una arbitrară dintre ele.

Mulțimea $S(0)$ se partiționează în două submulțimi disjuncte: $S(h, k)$, ce reprezintă mulțimea circuitelor hamiltoniene care trec prin arcul (h, k), iar $\overline{S(h, k)}$ este mulțimea complementară.

Pasul 4. Se calculează marginile inferioare ale costurilor tuturor circuitelor în fiecare submulțime:

Scanned with OKEN Scanner

(4-a) Pentru submulțimea $S(\overline{h, k})$, deoarece prin nefolosirea arcului (x_h, x_k), pe lîngă reducerea r va apare un cost dat de penalitatea x_{hk}, marginea inferioară va fi:

$$\theta(\overline{h, k}) = r + p_{hk}.$$

(4-b) Pentru submulțimea $S(h, k)$, se observă că, folosind arcul (x_h, x_k) nu se poate folosi arcul invers: (x_k, x_h). pentru ca drumul să nu treacă de două ori prin același vîrf. Pentru a evita utilizarea arcului (x_k, x_h), înlocuim $C^*_{kh} = \infty$. De asemenea, trebuie să se țină seama de faptul că, alegînd arcul (x_h, x_k) nu se mai poate utiliza nici un alt arc din linia h și din coloana k, deci se elimină linia h și coloana k din C^*. În matricea rămasă se calculează „reducerea referitoare la celula (h, k)", notată r_{hk}, reprezentînd cantitatea cu care matricea rămasă poate fi redusă. Rezultă că marginea inferioară în submulțimea $S(h, k)$ va fi:

$$\theta(h, k) = r + r_{hk}.$$

Cu acestea, se începe construcția arborescenței utilizate de metodă, ca în figura III.3.6.

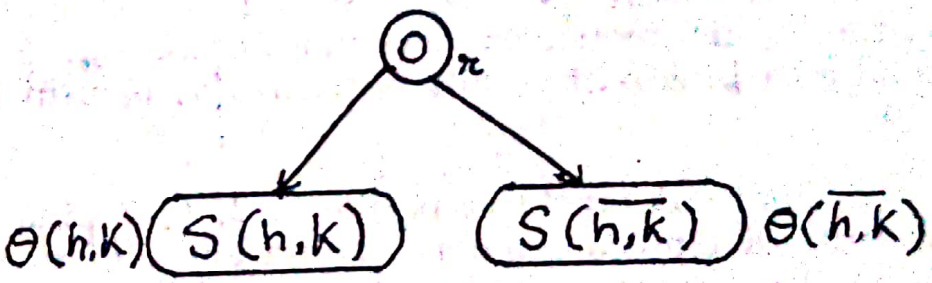


Fig. III.3.6

Pasul 5. Se alege $\theta^* = \min\{\theta(\overline{h, k}), \theta(h, k)\}$

Dacă $\theta^* = \theta(h, k)$, se trece la pasul 2, folosind matricea redusă obținută în pasul (4 — b).

Dacă $\theta^* = \theta(\overline{h, k})$, în matricea $\| c^*_{ij} \|$ se pune $c^*_{hk} = \infty$ și se reduce matricea rezultată, trecînd cu ea la pasul 2.

Pasul 6. (urmează după pasul 2 în toate iterațiile, exceptînd prima iterație, cînd după pasul 2 se execută pașii 3 și 4). Trebuie partiționată o mulțime $S(s, q)$ de margine inferioară θ'. Fie (u, v) celula în care $p_{uv} = \max p_{ij}$ din matricea redusă a etapei respective, în care liniile și coloanele corespunzînd arcelor (m, n), aparținînd predecesorilor vîrfului care trebuie ramificat, au fost eliminate.

Scanned with OKEN Scanner

Se face partiționarea în $S(u, v)$ și $S(\overline{u, v})$ și se trece la pasul 7, ca în figura III.3.7.

Pasul 7. Se calculează marginile inferioare pentru submulțimile $S(u, v)$ și $S(u, \overline{v})$ formate, astfel:

(7-a) Pentru submulțimea $S(u, \overline{v})$, marginea inferioară este:

$\theta(u, v) = \theta' + p_{uv}$, unde θ' era marginea inferioară a mulțimii $S(s, q)$, pe care am partiționat-o.

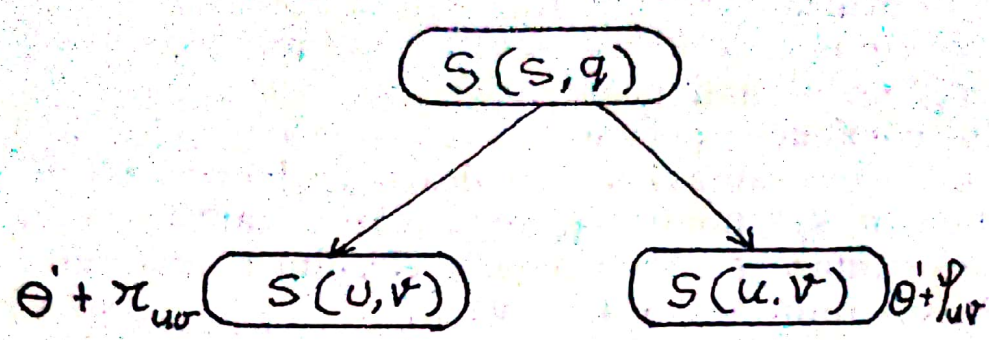


Fig. III.3.7

(7-b) Pentru $S(u, v)$ se elimină din matricea „costurilor transformate" a etapei respective linia u și coloana v, apoi se determină arcul (α, β), care, împreună cu arcele incluse anterior în drumul de pînă aici, ar forma un subciclu. Se alege deci costul $C* = \infty$ și se reduce, iar matricea astfel obținută, fie reducerea corespunzătoare r_{uv}. Se determină marginea inferioară a submulțimii $S(u, v)$ prin formula:

$$\theta(u, v) = \theta' + r_{uv}$$

Se continuă repetarea pașilor 5, 2, 6, 7 pînă la obținerea circuitului hamiltonian dorit, iar marginea inferioară a ultimei submulțimi (care nu mai poate fi ramificată sau partiționată) reprezintă „costul" minim al acestui circuit hamiltonian.

Observații. 1. Problema poate avea mai multe soluții optime, continuînd ramificările în vîrfuri abandonate în etape anterioare, care corespund la un moment dat unor margini inferioare minime.

2. Metoda este foarte generală, fiind aplicabilă la grafuri orientate, complete, în care matricea inițială a costurilor C este nesimetrică.

Exemplu. Pentru încheierea contractelor cu unitățile de desfacere din zece orașe, reprezentantul unei întreprinderi producătoare trebuie să treacă prin cele zece orașe, cîte o singură dată. Poate să plece din oricare dintre orașe spre celelalte și să se întoarcă la orașul de plecare. Din cauza

Scanned with OKEN Scanner

legăturilor existente între mijloacele de transport (trenuri, vapoare, avioane, autobuze etc.) timpul de trecere de la un oraș x_i la alt oraș x_j (în ore) are valori variate, date în tabelul III.3.15. Trebuie să se determine traseele optime (de timp total minim), adică un CHM.

Tabelul III.3.15

De la \ La	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
x_1	—	55	59	97	45	67	81	75	4	32
x_2	57	—	5	72	13	58	5	53	78	82
x_3	35	80	—	27	28	54	50	21	3	68
x_4	73	6	12	—	8	15	23	13	32	53
x_5	8	100	6	14	—	6	47	39	65	59
x_6	87	71	6	9	21	—	23	55	38	54
x_7	83	101	53	35	39	5	—	7	30	10
x_8	6	21	13	34	50	19	88	—	4	33
x_9	5	14	52	49	7	100	74	88	—	50
x_{10}	42	10	52	69	59	87	86	61	33	—

Rezolvare. Scriem matricea C, cu elementele $c_{ij} = \infty$ (vezi tabelul III.3.16) și trecem la primul pas al algoritmului lui Little, determinînd matricea redusă $C*$ (vezi tabelul III.3.17) și valoarea r a reducerii totale.

Tabelul III.3.16

(C):

De la \ La	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	α_i
x_1	∞	55	59	97	45	67	81	74	4	32	4
x_2	57	∞	5	72	13	58	5	53	78	82	5
x_3	35	80	∞	27	28	54	50	21	3	68	3
x_4	73	6	12	∞	8	15	23	13	32	63	6
x_5	8	100	6	14	∞	6	47	39	65	59	6
x_6	87	71	6	9	21	∞	23	55	38	54	6
x_7	83	101	53	35	39	5	∞	7	30	10	5
x_8	6	21	13	34	50	19	88	∞	4	33	4
x_9	64	14	52	49	7	100	74	88	∞	50	7
x_{10}	42	10	52	69	59	87	86	61	33	∞	10

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul III.317

(C'):

De la \ La	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
x_1	∞	51	55	93	51	63	77	71	0	28
x_2	52	∞	0	67	8	53	0	48	73	77
x_3	32	77	∞	24	25	51	47	18	0	65
x_4	67	0	6	∞	2	9	17	7	26	47
x_5	2	94	0	8	∞	0	41	33	59	53
x_6	81	65	0	3	15	∞	17	49	32	48
x_7	78	96	48	30	34	0	∞	2	25	5
x_8	2	17	9	30	46	15	84	∞	0	29
x_9	58	7	45	42	0	93	67	81	∞	43
x_{10}	32	0	42	59	49	77	76	51	23	∞
β_j	2	0	0	3	0	0	0	2	0	5

Avem:

$$r = \sum_{i=1}^{10} \alpha_i + \sum_{j=1}^{10} \beta_j = 68.$$

În matricea redusă C^*, din tabelul III.3.18, se trec și penalitățile în celulele corespunzînd la $c^*_{ij} = 0$, conform pasului 2 al algoritmului lui Little.

Penalitățile au fost calculate astfel:

$$p_{19} = \min_{j \neq 9}\{c^*_{1j}\} + \min_{i \neq 1}\{c^*_{i9}\} = 23 + 0 - 23,$$

$$x_{23} = \min_{j \neq 3}\{c^*_{2j}\} + \min_{i \neq 2}\{c^*_{i3}\} = 0 + 0 = 0,$$

$$p_{27} = \min_{j \neq 7}\{c^*_{2j}\} + \min_{i \neq 2}\{c^*_{i7}\} = 0 + 17 = 17 \text{ etc.}$$

Determinăm: $\max_{i,j} p_{ij} = 23 = p_{19} = p_{7,\,10} = x_{10,\,2}$

Alegem, arbitrar, arcul (x_1, x_9) și partiționăm mulțimea $S(0)$ a tuturor itinerariilor posibile (avînd 9! elemente) în submulțimile $S(1, 9)$ și $S(\overline{1, 9})$, conform pasului 3 al algoritmului lui Little, fiind la prima iterație. Calculăm, conform pasului 4 al algoritmului, marginile inferioare ale celor două submulțimi.

$$\theta(\overline{1, 9}) = r + p_{19} = 68 + 23 = 91, \text{ pentru } S(\overline{1, 9})$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul III.3.18

(C^*):

De la \ La	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
x_1	∞	51	55	90	41	63	77	69	$\overset{23}{\underset{0}{0}}$	22
x_2	50	∞	$\overset{0}{\underset{0}{0}}$	64	8	53	$\overset{17}{\underset{0}{0}}$	46	73	72
x_3	30	77	∞	21	25	51	47	16	$\overset{16}{\underset{0}{0}}$	60
x_4	65	$\overset{2}{\underset{0}{0}}$	6	∞	2	9	17	5	26	42
x_5	$\overset{0}{\underset{0}{0}}$	94	$\overset{0}{\underset{0}{0}}$	5	∞	$\overset{0}{\underset{0}{0}}$	41	31	59	48
x_6	79	64	$\overset{0}{\underset{0}{0}}$	$\overset{5}{\underset{0}{0}}$	15	∞	17	47	32	43
x_7	76	96	48	27	34	$\overset{0}{\underset{0}{0}}$	∞	$\overset{5}{\underset{0}{0}}$	25	$\overset{23}{\underset{0}{0}}$
x_8	$\overset{0}{\underset{0}{0}}$	17	9	27	46	14	84	∞	$\overset{0}{\underset{0}{0}}$	24
x_9	56	7	45	39	$\overset{9}{\underset{0}{0}}$	93	67	79	∞	38
x_{10}	30	$\overset{23}{\underset{0}{0}}$	42	56	49	77	76	49	23	∞

Dacă vrem să calculăm marginea inferioară pentru $S(1, 9)$, punem $C^*_{91} = \infty$, eliminăm linia 1 și coloana 9 din matricea C și determinăm reducerea r_{19} în matricea rămasă. Calculele se execută în tabelele III.3.19 și III.3.20.

Tabelul III.3.19

De la \ La	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_{10}	α_i
x_2	50	∞	0	64	8	53	0	46	72	0
x_3	30	77	∞	21	25	51	47	16	60	16
x_4	65	0	6	∞	2	9	17	5	42	0
x_5	0	94	0	5	∞	0	41	31	48	0
x_6	79	65	0	0	15	∞	17	47	43	0
x_7	76	96	48	27	34	0	∞	0	0	0
x_8	0	17	9	27	46	15	84	∞	24	0
x_9	∞	7	45	39	0	93	67	73	38	0
x_{10}	30	0	42	56	49	77	76	49	∞	0

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul III.3.20

De la \ La	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_{10}
x_2	50	∞	0 0	64	8	53	17 0	46	72
x_3	14	61	∞	5	9	35	31	5 0	44
x_4	65	2 0	6	∞	2	9	17	5	42
x_5	0 0	94	0 0	5	∞	0 0	41	31	48
x_6	79	65	0 0	5 0	15	∞	17	47	43
x_7	76	96	48	27	34	0 0	∞	0 0	24 0
x_8	9 0	17	9	27	46	15	84	∞	24
x_9	∞	7	45	39	9 0	93	67	75	38
x_{10}	30	30 0	42	56	49	77	76	49	∞
β_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(c_1^*):

Avem:

$$r_{19} = \sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j = 16,$$

Deci, $\theta(1, 9) = r + r_{19} = 68 + 16 = 84$.

În tabelul III.3.20 se trec și penalitățile în celulele avînd $c_{ij}^{*(1)} = 0$.

Situația arborescenței, pînă la această etapă, este reprezentată în figura III.3.8. Avem $\theta(1, 9) < \theta(\overline{1, 9})$, deci se continuă partiționarea lui $S(1, 9)$.

Penalitatea maximă din tabelul III.3.20 este: $p_{10, 2} = 30$. Se alege deci arcul (x_{10}, x_2), formînd submulțimile $S(10, 2)$ și $S(\overline{10, 2})$, pentru care se calculează marginile inferioare.

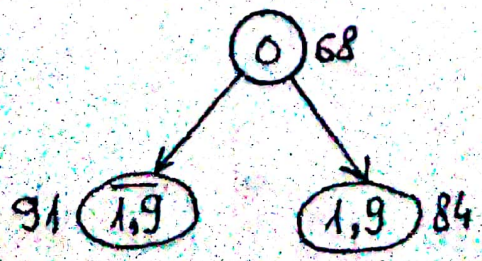


Fig. III.3.8

Scanned with OKEN Scanner

Avem:

$$\theta(\overline{10,\ 2}) = \theta(1,\ 9) + p_{10,\ 2} = 84 + 30 = 114.$$

Pentru a calcula $\theta(10,\ 2)$, se aplică pasul 7 al algoritmului lui Little. Partiționarea pentru formarea submulțimii $S(10,\ 2)$, care conține circuitele ce includ arcele $(x_1,\ x_9)$ și $(x_{10},\ x_2)$, cere excluderea arcului $(x_2,\ x_{10})$, deci $c^{*(1)}_{2,\ 10} = \infty$. Căutăm reducerea r, din matricea obținută din C_1^*, înlăturînd linia 10 și coloana 2, iar $c^{*(1)}_{2,\ 10} = \infty$. Calculele se fac în tabelele III.3.21 și III.3.22.

Tabelul III.3.21

De la \ La	x_1	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_{10}	α_i
x_2	50	0	64	8	53	0	46	∞	0
x_3	14	∞	5	9	35	31	0	44	0
x_4	65	6	∞	2	9	17	5	42	2
x_5	0	0	5	∞	0	41	31	48	0
x_6	79	0	0	15	∞	17	47	43	0
x_7	76	48	27	34	0	∞	0	0	0
x_8	0	9	27	46	15	84	∞	24	0
x_9	∞	45	39	0	77	67	79	38	0

Tabelul III.3.22

(C_2^*):

De la \ La	x_1	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_{10}
x_2	50	0 / 0	65	8	53	15 / 0	46	∞
x_3	14	∞	5	9	35	31	5 / 0	44
x_4	63	4	∞	3 / 0	7	15	3	40
x_5	0 / 0	0 / 0	5	∞	0 / 0	41	31	48
x_6	79	0 / 0	5 / 0	15	∞	17	47	43
x_7	76	48	27	34	0 / 0	∞	0 / 0	24 / 0
x_8	9 / 0	9	27	46	15	84	∞	24
x_9	∞	45	39	38 / 0	77	67	79	38
β_j	0	0	0	0	0	0	0	0

Scanned with OKEN Scanner

Deci, $r_{10,2} = \sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j = 2$.

Rezultă că: $\theta(10, 2) = \theta(1, 9) + r_{10,2} = 84 + 2 = 86$.

Deci, $\theta(10, 2) < \theta(\overline{10, 2})$ și se continuă ramificația arborescenței prin partiționarea mulțimii $S(10, 2)$. La această etapă, arborescența are imaginea din figura III.3.9.

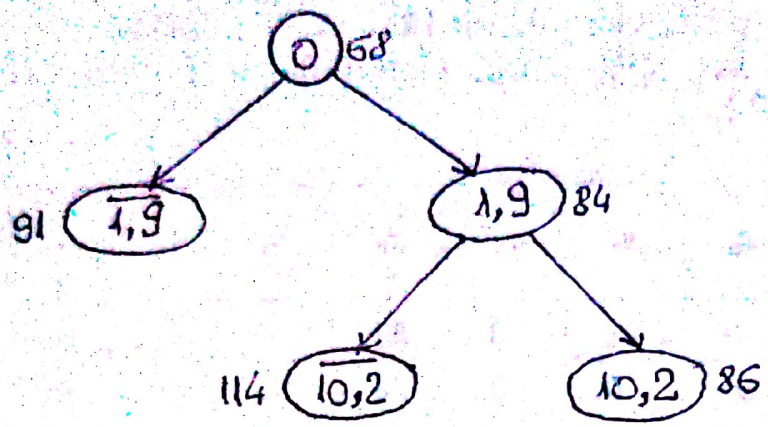


Fig. III.3.9

Cercetăm penalitățile calculate în tabelul III.3.22 și alegem cea mai mare penalitate, adică: $p_{9,5} = 38$. Alegem arcul (x_9, x_5). Drumul format pînă acum conține arcele (x_1, x_9) și (x_9, x_5), deci trebuie eliminat arcul (x_5, x_1) (pentru a evita formarea unui circuit), prin condiția $C_{51}^{*(2)} = \infty$.

Calculăm marginea inferioară pentru $S(\overline{9, 5})$, cu formula:

$$\theta(\overline{9, 5}) = \theta(10, 2) + p_{95} = 86 + 38 = 124.$$

Pentru calculul lui $\theta(9, 5)$ se calculează reducerea r_{95} din matricea formată din C_2^* prin eliminarea liniei 9 și coloanei 5, punînd și $C_{51}^{*(2)} = \infty$. Calculele sînt efectuate în tabelele III.3.23 și III.3.24.

Tabelul III.3.23

De la \ La	x_1	x_3	x_4	x_6	x_7	x_8	x_{10}	α_i
x_2	50	0	64	53	0	46	∞	0
x_3	14	∞	5	35	31	0	44	0
x_4	63	4	∞	7	15	3	40	3
x_5	∞	0	5	0	41	31	48	0
x_6	79	0	0	∞	17	47	43	0
x_7	65	48	27	0	∞	0	0	0
x_8	0	9	27	15	84	∞	24	0

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul III.3.24

(C_3^*):

De la \ La	x_1	x_3	x_4	x_5	x_7	x_8	x_{10}
x_2	50	0 0	64	53	12 0	46	∞
x_3	14	∞	5	35	31	5 0	44
x_4	60	1	∞	4	12	1 0	37
x_5	0	0 0	5	0 0	41	31	48
x_6	79	0 0	5 0	∞	17	47	43
x_7	76	48	27	0 0	∞	0 0	24 0
x_8	23 0	9	27	15	84	∞	24
β_j	0	0	0	0	0	0	0

Pe baza datelor din aceste tabele, rezultă valoarea reducerii r_{95}, ca fiind:

$$r_{95} = \sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j = 3.$$

Deci: $\theta(9, 5) = \theta(10, 2) + r_{95} = 86 + 3 = 89 < \theta(\overline{9, 5})$.

Se continuă partiționarea submulțimii $S(9, 5)$, (care are marginea inferioară mai mică). Penalitatea maximă, conform tabelului III.3.24, este: $x_{7,10} = 24$. Se alege deci arcul (x_7, x_{10}), formînd submulțimile $S(7, 10)$ și $S(7, \overline{10})$. Arborescența formată pînă la această etapă este ilustrată în figura III.3.10.

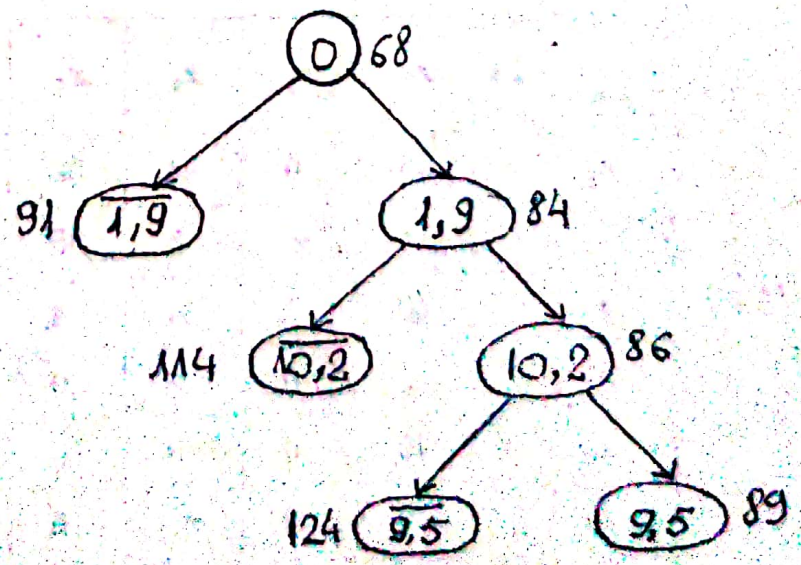


Fig. III.10

Submulțimile $S(\overline{7,\ 10})$ are marginea inferioară:

$$\theta(\overline{7,\ 10}) = \theta(9,\ 5) + x_{7,\ 10} = 89 + 24 = 113.$$

Pentru a calcula $\theta(7,\ 10)$, din tabelul III.3.24 se elimină linia 7 și coloana 10, iar $C_{27}^{*(3)} = \infty$, pentru că drumul format pînă acum conține arcele $(x_7,\ x_{10})$ și $(x_{10},\ x_2)$; eliminăm deci arcul $(x_2,\ x_7)$ pentru a nu se forma un circuit. Calculele pentru obținerea matricei redus C_4^* și a reducerii, $r_{7,\ 10}$ se execută în tabelele III.3.25 și III.3.26. Avem:

$$r_{7,\ 10} = \sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j = 12,$$

$$\theta(7,\ 10) + \theta(9,\ 5) + r_{10} = 89 + 12 = 101.$$

Tabelul III.3.25

De la \ La	x_1	x_3	x_4	x_6	x_7	x_8	α_i
x_2	50	0	64	53	∞	46	0
x_3	14	∞	5	35	31	0	0
x_4	60	1	∞	4	12	0	0
x_5	∞	0	5	0	41	31	0
x_6	79	0	0	∞	17	47	0
x_8	0	9	27	15	84	∞	0
β_j	0	0	0	0	0	0	∞

Tabelul III.3.26

(C_4^*):

De la \ La	x_1	x_3	x_4	x_6	x_7	x_8
x_2	50	0	64	53	∞	46
x_3	14	∞	5	35	19	0
x_4	60	1	∞	4	0	0
x_5	∞	0	5	0	29	31
x_6	79	0	0	∞	5	47
x_7	0	9	27	15	72	∞

Scanned with OKEN Scanner

Arborescența obținută pînă la această etapă este ilustrată în figura III.3.11. În arborescența respectivă se constată că cea mai mică margine inferioară a tuturor vîrfurilor terminale este 91. Se continuă ramificația din nodul corespunzînd

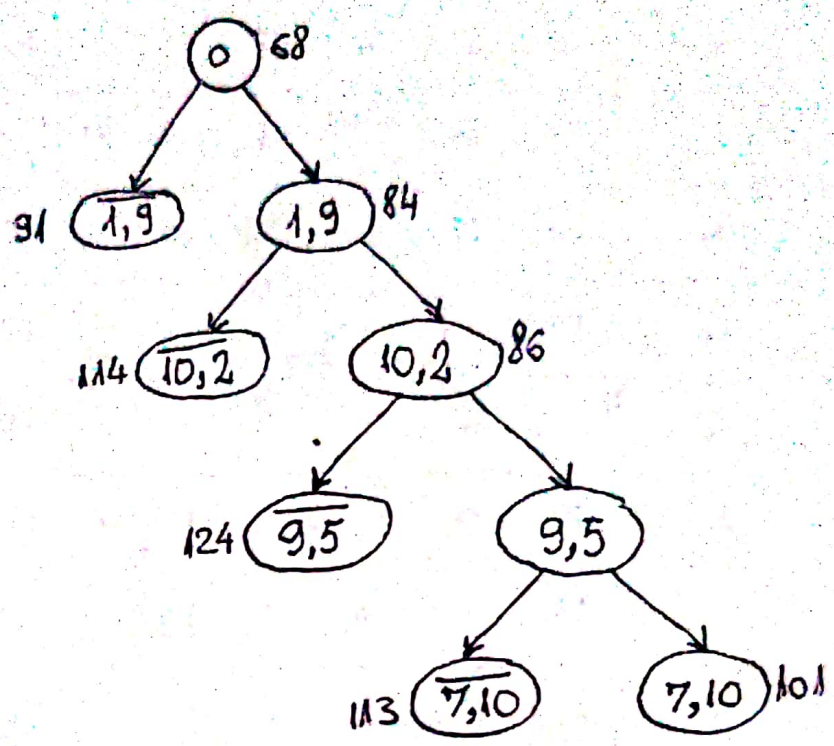


Fig. III.3.11

submulțimii $S(\overline{1,\ 9})$, a traseelor care nu conțin arcul $(x_1,\ x_9)$. Pentru aceasta se reia tabelul III.3.18 al matricei reduse C^*, în care se va pune $C^*_{1,\,9} = \infty$. Se face reducerea matricei obținute și se calculează penalitățile ca în tabelele III.3.27 și III.3.28.

Tabelul III.3.27

De la \ La	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	α_i
x_1	∞	51	55	90	41	63	77	69	∞	23	23
x_2	50	∞	0	64	8	53	0	46	73	72	0
x_3	30	77	∞	21	25	51	47	15	0	60	0
x_4	65	0	6	∞	2	9	17	5	26	42	0
x_5	0	94	0	5	∞	0	41	31	59	48	0
x_6	79	65	0	0	15	∞	17	47	32	43	0
x_7	76	96	48	27	34	0	∞	0	25	0	0
x_8	0	17	9	27	46	15	84	∞	0	24	0
x_9	56	7	45	39	0	93	67	79	∞	38	0
x_{10}	30	0	42	56	49	77	76	49	23	∞	0
β_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	∞

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul III.3.28

(C_5^*):

De la \ La	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
x_1	∞	28	32	67	18	40	54	46	∞	18 0
x_2	50	∞	0 0	64	8	53	17 0	46	73	72
x_3	30	77	∞	21	25	51	47	16	16 0	60
x_4	65	2 0	6	∞	2	9	17	5	26	42
x_5	0 0	94	0 0	5	∞	0 0	41	31	59	48
x_6	79	65	0 0	5 0	15	∞	17	47	32	43
x_7	76	96	48	27	34	0 0	∞	5 0	25	0 0
x_8	0 0	17	9	27	46	15	84	∞	0 0	24
x_9	56	7	45	39	9 0	93	67	79	∞	38
x_{10}	30	23 0	42	56	49	77	76	49	23	∞

Avem reducerea $r' = \sum \alpha_i + \sum \beta_j = 23$.

Penalitatea maximă este $p_{10,\,2} = 23$. Se alege arcul $(x_{10},\ x_2)$ și se face partiționarea lui $S(\overline{1,\ 9})$ în $S(10,\ 2)$ și $S(\overline{10,\ 2})$.

Marginea inferioară pentru $S(\overline{10,\ 2})$ rezultă imediat:

$$\theta(\overline{10,\ 2}) = \theta(\overline{1,\ 9}) + x_{10,\,2} = 91 + 23 = 114.$$

Pentru calculul marginii inferioare a mulțimii $S(10,\ 2)$ se procedează ca și pînă acum, eliminînd din matricea C_5^* din tabelul III.3.28, linia 10 și coloana 2 și punînd $c_{2,\,10} = \infty$. În noua matrice redusă C_6^* se calculează reducerea: $r_{10,\,2} = 2$ și toate penalitățile.

Am arătat în detaliu calculele pînă la această etapă, pentru a ilustra și partiționarea unei submulțimi de forma $S(\overline{u,\ v})$.

Scanned with OKEN Scanner

Continuarea algoritmului se face analog, ajungînd la rezultatul final reprezentat grafic în figura III.3.12, pe care se poate citi soluția optimă a acestei probleme.

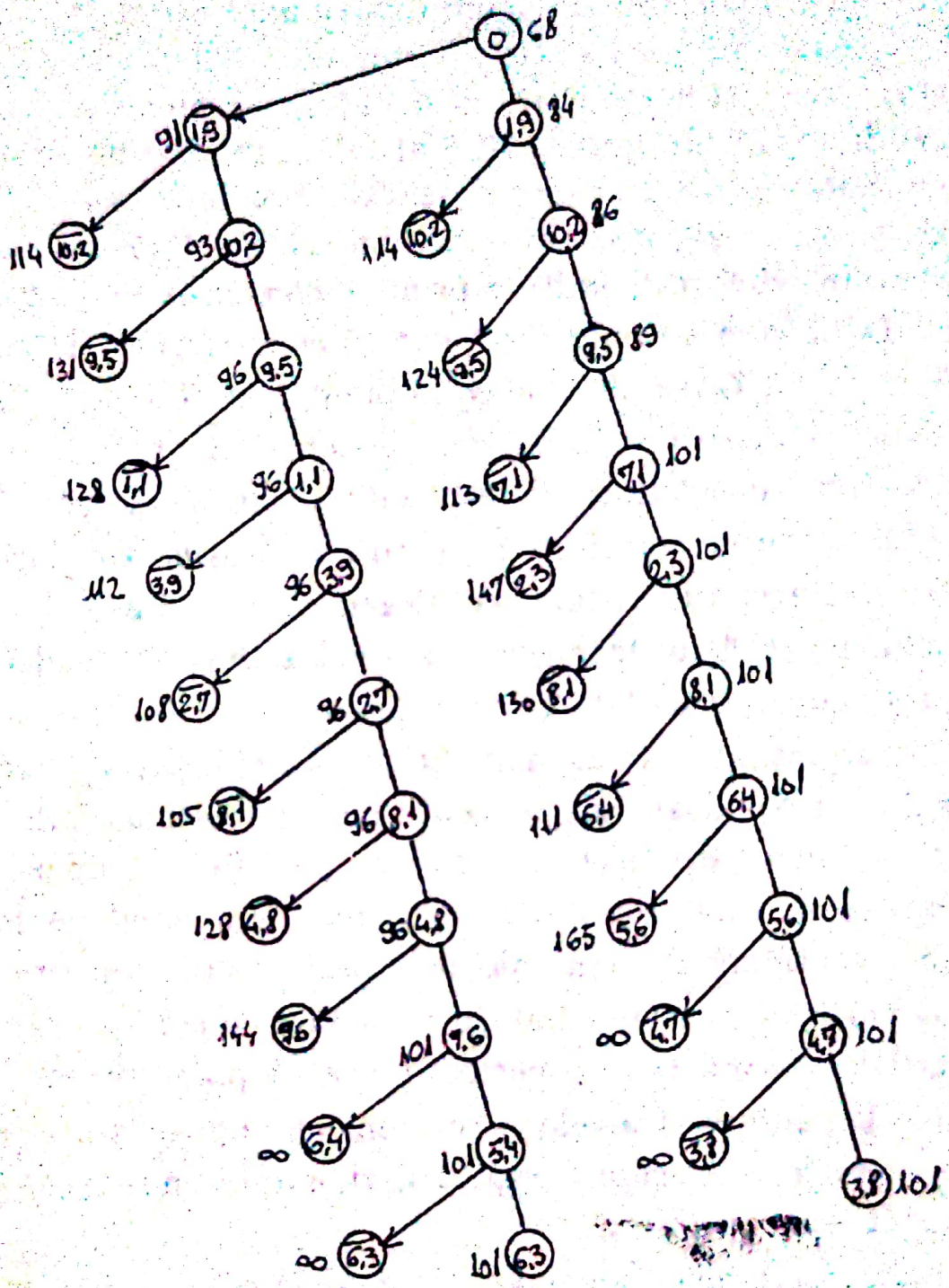


Fig. III.3.12

Există deci două circuite hamiltoniene minime, de valoare totală 101 (timp total minim 101 ore), anume:

$$CHM_1 = (x_1, x_{10}, x_2, x_7, x_6, x_3, x_9, x_5, x_4, x_8, x_1),$$

$$CHM_2 = (x_1, x_9, x_5, x_6, x_4, x_7, x_{10}, x_2, x_3, x_8, x_1).$$

Scanned with OKEN Scanner

În finalul paragrafului de față, vom prezenta metode de rezolvare a unor probleme de transport, cu ajutorul traseelor hamiltoniene din grafuri neorientate. Una dintre noțiunile ajutătoare importante, în determinarea unor astfel de trasee, este aceea de arbore acoperire al unui graf dat. Fiind dat un graf G, conex și neorientat, cu n vîrfuri, se numește arbore acoperire al lui un graf parțial al lui G, ce este un arbore. Vom nota, pentru ușurarea scrierii, muchiile grafului G prin $e_1, e_2, \ldots, e_m$, înșiruirea lor fiind făcută fără a avea în vedere un criteriu anumit, ei printr-o convenție de numerotare. După cum se vede, s-a notat cu m numărul muchiilor, convenția ca G să fie conex impunînd $m \geqslant n - 1$. Este evident că aflarea unui arbore acoperire al grafului G se poate face considerînd succesiv cîte o muchie a grafului, care să nu formeze nici un ciclu, cu cele considerate pînă la momentul respectiv; după ce alegem în acest fel $(n - 1)$ muchii, pe celelalte le suprimăm, fiind astfel conduși la un arbore acoperire al lui G.

Dacă graful G este evaluat, fiecărei muchii $[x_i, x_j]$ corespunzîndu-i o valoare v_{ij}, se poate pune problema determinării — dintre toți arborii acoperire posibili — a unuia (a unora) cu valoarea totală cea mai mică. În astfel de probleme, considerăm drept valoare a unui arbore acoperire T, suma valorilor de pe muchiile lui; o notăm cu $v(T)$. Deoarece această problemă este importantă pentru practică, ea ajutînd și la căutarea traseelor hamiltoniene în grafuri neorientate, vom insista asupra rezolvării ei, prezentînd o metodă în acest sens.

Fie un graf conex evaluat $G = (X, \overline{\gamma}, v)$ și fie v_{ij} ponderea muchiei $[x_i, x_j]$. Se pune problema găsirii *arborelui minimal (economic)*, adică arborele acoperire $\overline{T}$, pentru care avem:

$$\min v(T) = \sum_{(x_i, x_j) \in \overline{T}} v_{ij}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Lema Berge. Fie G un graf conex, finit, complet și cu valori distincte v_{ij}. Atunci se poate extrage din G un singur arbore economic.

Demonstrație. Arătăm existența arborelui minimal construindu-i efectiv în modul următor:

Se alege o muchie $e_1 = [x_i, x_j]$, cu $v_{ij} = v(e_1)$ cea mai mică dintre valorile funcției v și obținem arborele, T_1, format dintr-o singură muchie. Se alege apoi muchia e_2, cu $e_2 \neq e_1$ și $v(e_2)$ cea mai mică dintre valorile muchiilor rămase după alegerea lui e_1 și se formează arborele $T_2 = \{e_1, e_2\}$. Se alege apoi e_3, cu proprietățile: $e_3 \neq e_1$, $e_3 \neq e_2$, cu valoarea $v(e_3)$ cea mai mică din cele rămase, astfel ca să nu se formeze un ciclu și avem $T_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ ș.a.m.d., pînă se obține $\bar{T}_{n-1}$. Presupunem, prin absurd, că $\bar{T}_{n-1}$ nu este minim și deci că există $\bar{\bar{T}}_{n-1}$, cu $v(\bar{\bar{T}}_{n-1}) < v(\bar{T}_{n-1})$ și $\bar{\bar{T}}_{n-1} \neq \bar{T}_{n-1}$. Rezultă că arborii diferă printr-o muchie; fie e_k muchia de cea mai mică valoare e_k în $\bar{T}_{n-1}$ și astfel se formează un graf, $\tilde{G}$, care conține un singur ciclu. În graful $\tilde{G}$ eliminăm o altă muchie, diferită de e_k, fie aceasta e_k. Se obține un arbore $\bar{\bar{\bar{T}}}$ cu valoarea:

$$v(\bar{\bar{\bar{T}}}) = v(\bar{T}) + v(e_k) - v(e_p).$$

Cum am presupune că $\bar{\bar{\bar{T}}}$ are cea mai mică valoare, deci $v(\bar{\bar{\bar{T}}}) < v(\bar{\bar{T}})$, trebuie ca: $v(e_k) - v(e_p) > 0$, de unde $v(e_k) > v(e_p)$ și care contrazice faptul că s-a ales muchia e_k din $\bar{T}_{n-1}$ de cea mai mică valoare.

Algoritmul Kruskal se bazează pe lema Berge. Se construiește arborele acoperire minimal, alegînd încît muchia e_1 de cea mai mică valoare, apoi muchia e_2 de valoare minimă dintrecele rămase, pe rînd apoi muchia e_3, e_4, ..., e_{n-1}, fiecare de cea mai mică valoare dintre muchiile care au rămas și cu condiția să nu se formeze cicluri cu muchiile alese anterior.

Scanned with OKEN Scanner

Algoritmul se poate completa și în situațiile care nu apar în lema Berge, anume dacă există valori egale, sau dacă graful nu este complet.

Cazul 1. Dacă există o serie de muchii: $e_1, e_2, \ldots, e_k$ cu $v(e_1) = v(e_2) = \ldots = v(e_k)$, atunci se înlocuiește pe fiecare muchie valoarea astfel:

$$\begin{aligned} v(e_1) &\to \tilde{v}(e_1) = v(e_1) + \varepsilon, \\ v(e_2) &\to \tilde{v}(e_2) = v(e_2) + 2\varepsilon, \\ &\vdots \\ v(e_k) &\to \tilde{v}(e_k) = v(e_k) + k\varepsilon, \end{aligned}$$

unde $\varepsilon > 0$ este arbitrar de mic. Rezultă $\tilde{v}(e_1) \neq \tilde{v}(e_2) \neq \ldots \neq \tilde{v}(e_k)$. Acum apare situația din lema Berge, în graf toate valorile sînt distincte și se aplică algoritmul pe noul graf $G_n(\varepsilon)$, deducînd arborele $T_{n-1}(\varepsilon)$. Se face apoi $\varepsilon = 0$.

Cazul 2. Dacă graful nu este complet, el poate fi completat prin introducerea unor muchii $\tilde{e}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ cu valori foarte mari, de exemplu: $v(\tilde{e}_i) = \sum_{e_k \in G} v(e_k)$. Prin aplicarea algoritmului în graful $\tilde{G}$ completat, nici una dintre muchiile e_i nu se poate alege.

Exemplu. În urma industrializării, cele zece comune dintr-o zonă mai izolată a țării au ajuns la un nivel de dezvoltare care impune cu necesitate racordarea lor la sistemul național de căi ferate. Studiul posibilităților de amplasare a liniilor și costurilor corespunzătoare are ca model graful din figura III.3.13. Să se determine cel mai economic sistem de racordare la sistemul național de căi ferate a celor zece comune urbanizate.

Rezolvare. Vom aplica algoritmul lui Kruskal în mod direct, fără a mai diferenția valorile egale ale muchiilor din figura III.3.13.

Considerăm, mai întîi, muchia $e_1 = [x_4, x_{10}]$, cu cea mai mică valoare (egală cu unu), deci punem: $T_1 = \{e_1\}$. Adăugăm apoi, succesiv, muchiile [1, 5] și [5, 4], avînd valori

Scanned with OKEN Scanner

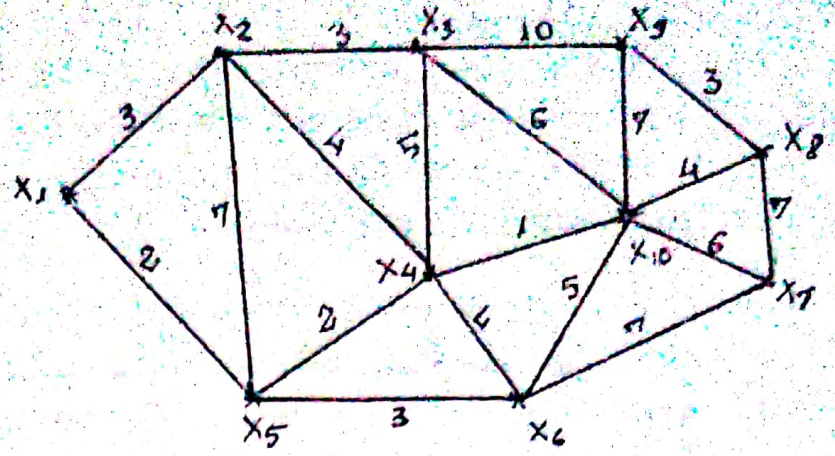


Fig. III.3.13

egale cu 2 și neînchizînd cu $[x_4, x_{10}]$ nici un ciclu, precum și muchiile $[x_1, x_2]$ $[x_2, x_3]$, $[x_5, x_6]$, $[x_8, x_9]$, cu valori egale cu trei și de asemenea, neînchizînd nici un ciclu împreună cu muchiile alese anterior. Se obține astfel 'graful parțial din figura III.3.14, care nu este încă conex. Să cercetăm graful parțial din această figură și să încercăm să îi adăugăm o muchie cu valoare egală cu 4. Muchia $[x_2, x_4]$ nu poate fi adăugată, deoarece ar închide ciclul $[x_1, x_2, x_4, x_5, x_1]$, iar muchia $[x_4, x_6]$, de asemenea, deoarece ar închide ciclul $[x_5, x_4, x_6]$. În schimb, se poate adăuga muchia $[x_8, x_{10}]$. La graful parțial obținut astfel, încercăm adăugarea unei muchii cu valoare egală cu 5: muchiile $[x_2, x_4]$ și $[x_6, x_{10}]$ închid respectiv ciclurile $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1]$ și $[x_5, x_4, x_{10}, x_6]$, deci încercăm cu muchii de valori mai mari (egale cu 6). Muchia $[x_3, x_{10}]$ închide ciclul $[x_1, x_2, x_3, x_{10}, x_4, x_5, x_1]$ în schimb, muchia $[x_7, x_{10}]$ nu închide nici un ciclu. Ca urmare, adăugăm muchia $[x_7, x_{10}]$, ceea ce conduce la arbo-

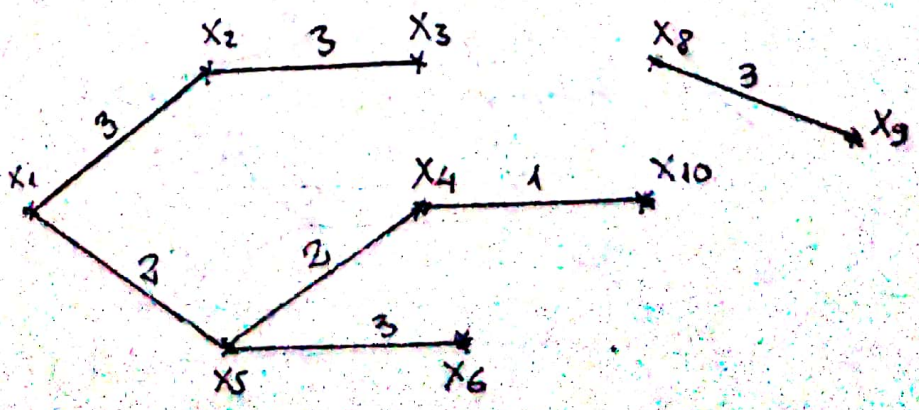


Fig. III.3.14

rele acoperire minimal din figura III.3.15; valoarea lui este egală cu 27. Ca urmare, sistemul din figura III.3.15 reprezintă cel mai economic sistem de racordare la sistemul național de căi ferate, a celor zece comune. Valoarea totală a construirii acestui sistem, este de 27 u.b.

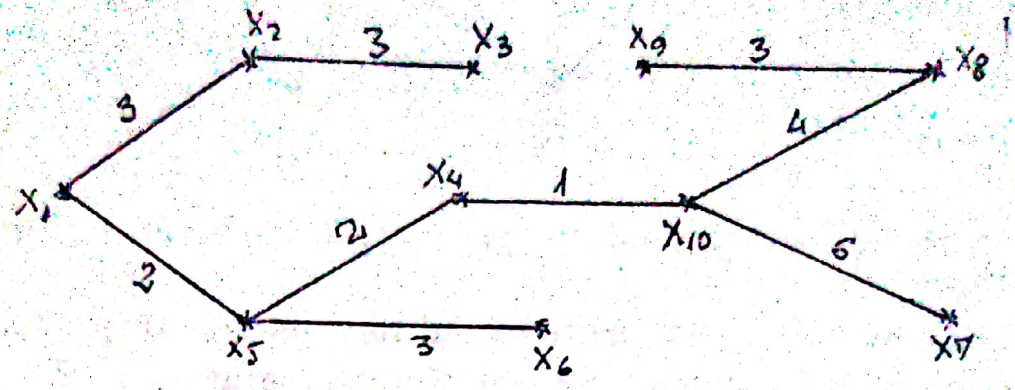


Fig. III.3.15

Observație. Cînd un arbore-economic este determinat, se poate găsi arborescența minimală de rădăcină fixată, orientînd arcele de la respectiva rădăcină. Astfel, dacă în exemplul anterior, în comuna x_4 se instalează comisia de construire a căii ferate, comunicarea comisiei cu celelalte comune este ilustrată de „arborescența minimală", cu rădăcina x_4, din figura III.3.16.

Cu ajutorul metodei de determinare a arborelui economic, vom aborda, în cele ce urmează, problema traseelor hamiltoniene în grafurile neorientate.

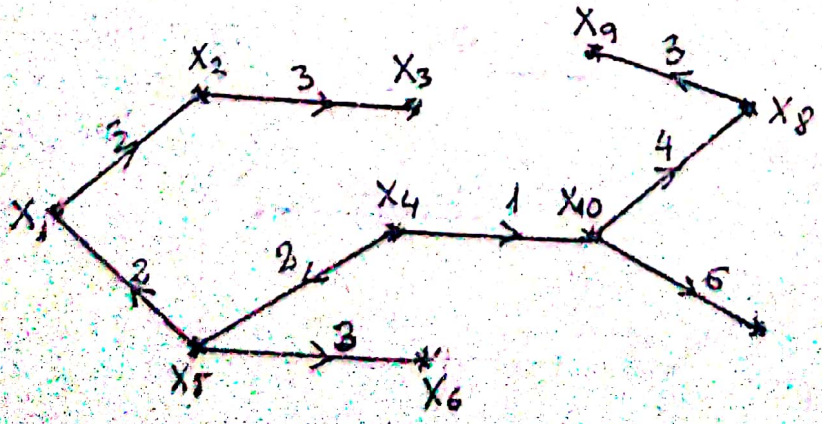


Fig. III.3.16

Scanned with OKEN Scanner

Fie $G = (X, \gamma)$ un graf neorientat și complet, cu n noduri, matricea valorilor fiind notată cu V. El conține $\frac{n!}{2}$ lanțuri hamiltoniene și $\frac{(n-1)!}{2}$ cicluri hamiltoniene (pentru $n \geqslant 3$). Dacă extremitățile lanțurilor hamiltoniene sînt fixate în două noduri, x_i și x_j, atunci există $(n-2)!$ lanțuri hamiltoniene cu extremitățile x_i și x_j. Cînd graful este evaluat, interesează găsirea lanțurilor hamiltoniene sau a ciclurilor hamiltoniene de lungime totală minimă.

Există trei tipuri de probleme de trasee hamiltoniene minime, anume:

P1: lanț hamiltonian minim (LHM);

P2: lanț hamiltonian minim cu extremități fixate în nodurile x_i și x_j (LHM_{ij});

P3: ciclu hamiltonian minim (CHM).

Problemele P1, P2 și P3 sînt echivalente din punct de vedere al rezolvării, adică un algoritm cunoscut pentru una dintre ele rezolvă și celelalte două probleme. Astfel, să presupunem că este cunoscut un algoritm pentru problema P_1. Cu acest algoritm rezolvăm problema P_2, schimbînd matricea V într-o matrice $V_{(i,j)}$, astfel: se adună la liniile i și j, apoi la toate elementele coloanelor i și j un același număr k, mai mare decît lungimea oricărui lanț hamiltonian din G $\left(\text{de exemplu: } k = \sum_{v_{ij}<\infty} v_{ij}\right)$ dar păstrînd elementele diagonalei nule.

Deci elementele din celulele (i, j) și (j, i) se vor mări cu $2k$, iar elementele care nu se găsesc pe liniile sau coloanele de indici i sau j rămîn neschimbate. În graful cu matrice $V_{(i,j)}$, un LHM va reprezenta un LHM_{ij} pentru graful cu matricea V.

Reciproc, dacă este cunoscut un algoritm pentru o problemă P_2, se poate rezolva cu el și o problemă P_1, transformînd graful G într-un graf $G_1 = (X, \gamma)$, unde $X_1 = X \cup \{x_{n+1}, x_{n+2}\}$ adică s-au atașat încă două noduri),

Scanned with OKEN Scanner

iar lungimile muchiilor formate cu vîrfurile auxiliare introduse se iau:

$$v[x_{n+1},\ x_i] = a,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$
$$v[x_j,\ x_{n+2}] = b,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$
$$V[x_{n+1},\ x_{n+2}] = 0,$$

cu $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ oarecare.

În G_1 se caută un $\mathrm{LHM}_{n+1,\ n+2}$ și se suprimă extremitățile și muchiile adiacente lor, obținînd un LHM în G.

Presupunînd cunoscut un algoritm pentru P_2, se poate rezolva cu el o problemă tip P_3, astfel: Din graful G formăm graful $G_2 = (X,\ \bar{\gamma}_2)$, unde $X_2 = X \cup \{x_{n+1}\}$ (se adaugă un nod). În X se alege arbitrar un nod x_p și se definesc lungimile muchiilor legate de nodul adițional, astfel:

$$v[x_{n+1},\ x_i] = V[x_p,\ x_i] = v_{ip} \text{ pentru } i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \text{ și}$$
$$i \neq p,\ v[x_{n+1},\ x_p] = 0.$$

În graful G_2 se află, cu ajutorul algoritmului, un $\mathrm{LHM}_{p,\ n+1}$. În acest lanț hamiltonian, dacă vîrful adiacent cu x_{n+1} este x_j, se suprimă muchia $[x_{n+1},\ x_p]$ și se înlocuiește cu muchia $[x_j,\ x_p]$ de aceeași lungime, obținînd un CHM.

În sfîrșit, cunoscînd un algoritm pentru o problemă de tip P_3, se poate aplica pentru o problemă de tip P_1, astfel: din graful G se formează un graf auxiliar $G_3 = (X_3,\ \bar{\gamma}_3)$ cu $X_3 = X \cup \{x_{n+1}\}$ (se adaugă un nod suplimentar), iar muchiile care leagă x_{n+1} de nodurile lui G_3 au lungimea:

$$v[x_{n+i} + x_i] = a \geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

În G_3 se determină un CHM, în care, apoi, se suprimă x_{n+1}, și cele două muchii adiacente lui, rămînînd un LHM în G.

Rezolvarea problemelor prezentate mai sus este dificilă. Vom prezenta un algoritm euristic, pentru rezolvarea problemei P_1, algoritm care conduce la o rezolvare aproximativă a acestei probleme. Pornim de la ideea că un lanț hamiltonian este un arbore-acoperire, în care vîrfurile extreme au

Scanned with OKEN Scanner

grade de incidență egale cu unu, iar celelalte vîrfuri au toate grade de incidență egale cu doi.

Propoziție. Dacă un arbore-acoperire al lui G are numai noduri de gradul 1 și de gradul 2, atunci el este un lanț hamiltonian al lui G.

Demonstrație. Fie p numărul nodurilor de gradul 1 din arborele-acoperire, deci sînt $n - p$ noduri de gradul doi. Dar, un arbore acoperire cu n noduri are $n - 1$ muchii. Deoarece suma gradelor nodurilor este egală cu dublul numărului de muchii, rezultă ecuația:

$$p + 2(n - x) = 2(n - 1), \text{ de unde } p = 2.$$

Însă, arborele care are 2 noduri de gradul 1 și restul de $n - 2$ noduri de gradul 2 este un lanț hamiltonian.

Algoritmul euristic pe care-l prezentăm pornește de la arborele economic, care, în cazul existenței unor noduri de grad mai mare decît doi va micșora gradele acestor noduri, cu o creștere cît mai mică a lungimii totale a arborelui.

Fie $G = (X, \gamma, v)$ un graf neorientat, complet, cu n vîrfuri și matricea valorilor V (de ordin $n \times n$).

Pasul 1. Se determină un arbore economic (arbore-acoperire de valoare minimă), cu algoritmul lui Kruskal.

Dacă acest arbore economic are numai vîrfuri de gradul 1 și 2, atunci el este un lanț hamiltonian, chiar un LHM.

Dacă arborele economic nu este lanț hamiltonian, se trece la pasul următor.

Pasul 2. Se micșorează treptat gradele vîrfurilor care sînt cel puțin egale cu 3, astfel încît, creșterea valorii totale să fie minimalizată la fiecare iterație. Acest lucru se face prin operațiile A, B, C, de mai jos:

Observație. Scăderea treptată a gradelor vîrfurilor x_i care au $g(x_i) \geqslant 3$, duce în final la un lanț hamiltonian (adică un arbore cu gradele nodurilor numai 1 și 2), dar acesta nu este totdeauna un LHM al grafului G, dar este o valoare aproximativă apropiată de cea a unui LHM.

Operația A: Fie un nod z cu $g(z) \geqslant 3$ și fie x, y două noduri terminale. Se introduce o muchie $[x, y]$ și se suprimă

Scanned with OKEN Scanner

o muchie $[z, t]$ din ciclul format, cea care are cea mai mare valoare dintre muchiile adiacente lui z și aflate în acest ciclu.

Operația B. Fie un nod u cu $g(z) \geqslant 3$, adiacent cu un nod terminal y. Se aleg două noduri oarecare: u și v, ambele de grad cel mult 2 și se intercalează y între u și v, adică se introduc muchiile $[y, u]$ și $[x, v]$, suprimînd muchiile $[z, y]$ și $[u, v]$.

Operația C. Fie un nod z cu $g(z) \geqslant 3$, adiacent cu un nod v neterminal. Dacă v nu se află pe lanțul unic care unește z cu un nod terminal y în arborele-acoperire, atunci se introduce muchia $[y, v]$ și se suprimă muchia $[z, v]$.

Creșterile de cost ale arborelui sînt:

Operația A: $\alpha = v[x, y] - v[z, t]$

Operația B: $\beta = v[y, u] + v[y, v] - v[y, z] - v[u, v]$

Operația C: $\nu = v[y, v] - v[z, v]$.

Observație. Aplicarea repetată a acestor operații va duce la obținerea unui lanț hamiltonian. Pentru ca lanțul hamiltonian obținut să fie cît mai mic, se aleg transformările care să minimizeze creșterea valorii arborelui în fiecare etapă.

Deci pasul 2 se aplică efectiv astfel:

(2-a) Se listează vîrfurile terminale (de grad 1) din arborele-economic obținut în pasul 1: $y_1, y_2, \ldots, y_h$. Alegem toate perechile (y_i, y_j), $j \neq i$ și se adaugă muchia $[y_i, y_j]$, suprimînd o altă muchie adiacentă cu un nod z de grad $g(z) \geqslant 3$, cea mai lungă din ciclul format (operația A — figura III.3.17).

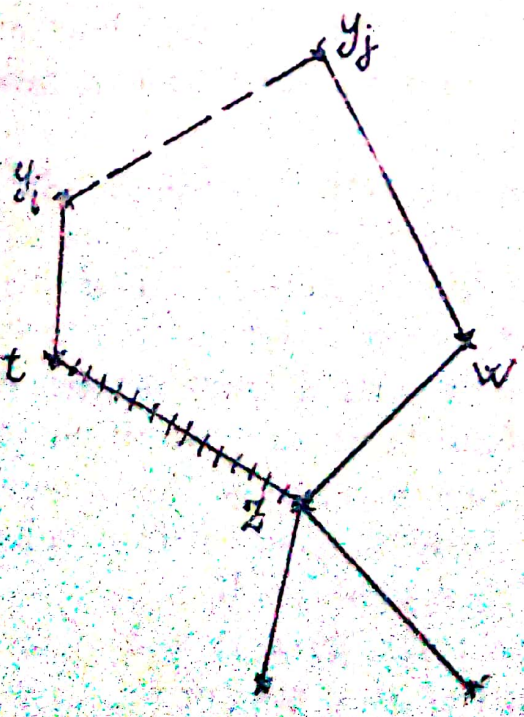


Fig. III.3.17

Scanned with OKEN Scanner

Se calculează creşterea minimă a lungimilor: $\alpha_0 = \min\{\alpha\}$, cu $= v(y_i, y_j) - v(z, t)$.

(2-b) Se aplică operaţia B (figura III.3.18), pentru toate vîrfurile terminale y adiacente cu un nod z cu $g(z) \geqslant 3$ şi se determină creşterea minimă a valorii lanţului pentru operaţiile B: $\beta = \min\{\beta\}$.

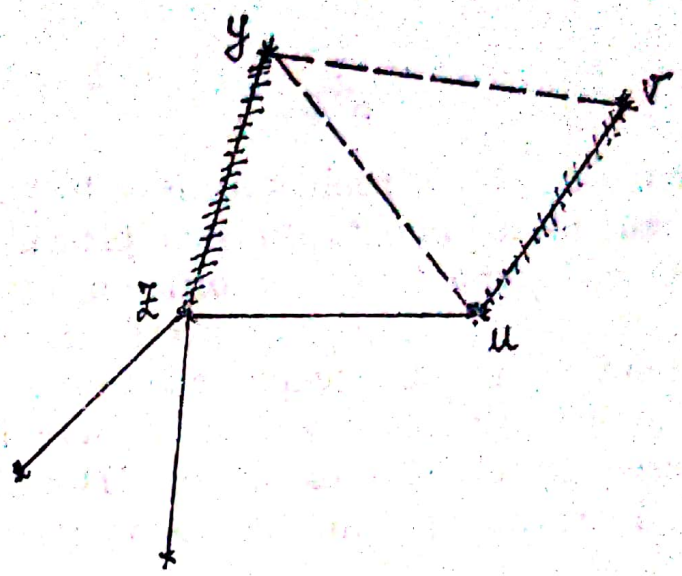


Fig. III.3.18

(2-c) Se aplică operaţia C (figura III.3.19), pentru toate vîrfurile v neterminale şi adiacente unui nod z de grad $g(z) \geqslant 3$, apoi se calculează creşterea minimă a valorii lanţului prin efectuarea operaţiilor C: $Y_0 = \min\{Y\}$.

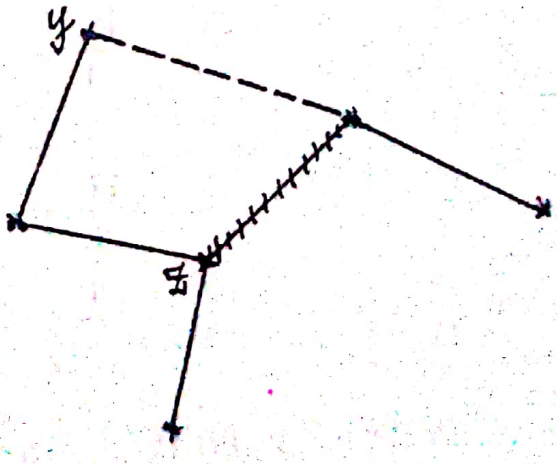


Fig. III.3.19

(2-d) Se alege min $(\alpha_0, \beta_0, \nu_0)$ şi se efectuează asupra arborelui operaţia corespunzătoare acestei valori. Cînd există mai multe operaţii care realizează această creştere minimă a valorii lanţului, se va alege acea transformare care produce scăderea gradului a două noduri de grad cel puţin trei (dacă există).

Scanned with OKEN Scanner

Dacă după transformarea efectuată, toate nodurile vor avea grad 1 și 2, algoritmul ia sfîrșit (s-a obținut un lanț hamiltonian de valoare apropiată de cea minimă). În caz contrar, se reia pasul 2, prin subpașii (2-a), (2-b), (2-c), (2-d).

Numărul maxim de iterații, pînă la obținerea unui lanț hamiltonian, este majorat de:

$$\sum_{g(z)\geq 3} [g(z) - 2].$$

Exemplu. Într-o problemă de colectare a corespondenței de la mai multe puncte, mașina pleacă de la centrul x_1 și trebuie să depună toate scrisorile colectate din punctele x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 la poșta centrală x_3. Trebuie determinat traseul optim care să înceapă de la unitatea x_1 și să se încheie la x_3, trecînd prin toate celelalte puncte de colectare a corespondenței. Datele sînt în tabelul III.3.29 și reprezintă distanțele între puncte (în sute de metri).

Tabelul III.3.29

De la \ La	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	2	7	15	10	8	9	21
x_2	2	0	23	45	35	14	7	2
x_3	7	23	0	8	11	17	13	22
x_4	15	45	0	8	12	32	21	15
x_5	10	35	11	12	0	42	38	19
x_6	8	14	17	32	42	0	31	36
x_7	9	7	13	21	38	31	0	18
x_8	21	5	22	15	19	36	18	0

Rezolvare. Trebuie determinat un $LHM_{1,3}$, deci este o problemă de tipul P_2. Pentru a aplica algoritmul prezentat, trebuie transformată întîi problema într-o problemă P_1, adăugînd o constantă suficient de mare (de exemplu, $k = 300$) la liniile 1 și 3, precum și la coloanele 1 și 3, exceptînd elementele diagonale (penalizarea extremităților pentru lanțul hamiltonian dorit).

Scanned with OKEN Scanner

Datele transformate sînt redate în tabelul III.3.30.

Cu algoritmul lui Kruskal, se determină arborele-economic, reprezentat în figura III.3.20, el avînd o valoare egală cu 660. Notăm: L = 660. Gradele vîrfurilor sînt:

$$g(x_1) = 1,\ g(x_4) = 3,\ g(x_7) = 1,$$
$$g(x_2) = 4,\ g(x_3) = 1,\ g(x_8) = 2.$$
$$g(x_3) = 1,\ g(x_6) = 1,$$

Tabelul III.3.30

(V):

De la \ La	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	302	607	315	310	308	309	321
x_2	302	0	323	45	35	14	7	2
x_3	607	323	0	308	311	317	313	322
x_4	35	45	308	0	12	32	21	15
x_5	310	35	311	12	0	42	38	19
x_6	308	14	317	32	42	0	31	36
x_7	309	7	313	21	38	31	0	18
x_8	321	5	322	15	19	36	18	0

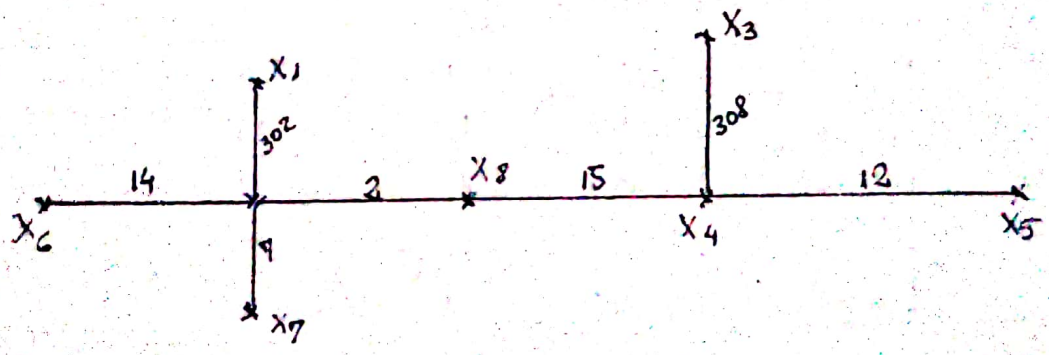


Fig. III.3.20

Nodurile x_2 și x_4 au gradele 4 și respectiv 3: trebuie să micșorăm aceste grade în pasul 2.

În cadrul primei iterații s-au efectuat calculele din tabelul III.3.31, din care rezultă că avem:

$\min(\alpha_0, \gamma_0) = \alpha_0 = 3$. Se face operația A, de introducere a muchiei $[x_3, x_5]$ și de suprimare a muchiei $[x_3, x_4]$. Rezultă arborele din figura III.3.21 de valoare $L_1 = L + 3 = 663$.

Tabelul III.3.31.

Operația	Muchii introduse	Muchii suprimate	Creșterea lungimii arborelui	Creșterea minimă la fiecare operație
A	$[x_1, x_3]$	$[x_3, x_4]$	607 — 408 = 299	
	$[x_1, x_3]$	$[x_1, x_2]$	607 — 302 = 305	
	$[x_1, x_5]$	$[x_1, x_2]$	310 — 302 = 8	
	$[x_1, x_6]$	$[x_1, x_2]$	308 — 302 = 6	
	$[x_1, x_7]$	$[x_1, x_2]$	309 — 302 = 7	
	$[x_3, x_5]$	$[x_3, x_4]$	311 — 308 = 3	*
	$[x_3, x_6]$	$[x_3, x_4]$	317 — 308 = 9	$\alpha_0 = 3$
	$[x_3, x_7]$	$[x_3, x_4]$	313 — 308 = 5	
	$[x_5, x_6]$	$[x_2, x_6]$	42 — 14 = 28	
	$[x_5, x_6]$	$[x_4, x_6]$	42 — 15 = 27	
	$[x_5, x_7]$	$]x_4, x_6]$	38 — 15 = 223	
	$[x_5, x_7]$	$[x_2, x_7]$	38 — 7 = 31	
	$[x_6, x_7]$	$[x_2, x_6]$	31 — 14 = 17	
B	Nu este aplicabilă la acest arbore.			
C	$[x_1, x_8]$	$[x_2, x_8]$	321 — 2 = 319	
	$[x_7, x_8]$	$[x_2, x_8]$	18 — 2 = 16	
	$[x_6, x_8]$	$[x_2, x_8]$	36 — 2 = 34	
	$[x_3, x_8]$	$[x_4$î $x_8]$	322 — 15 = 307	
	$[x_5, x_8]$	$[x_4, x_8]$	19 — 15 = 4	$\gamma_0 = 4$ *

Fig. III.3.21

Singurul nod de grad mai mare decît 2 este x_2 : $g(x_2) = 4$. Calculele iterației a doua sînt redate în tabelul III.3.32, tabel din care rezultă că avem:

$$\min(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) = 6.$$

Tabelul III.3.32

Operația	Muchii introduse	Muchii suprimate	Creșterea lungimii arborelui	Creșterea minimă la fiecare operație
A	$[x_1, x_3]$	$[x_1, x_2]$	607—302 = 305	
	$[x_1, x_3]$	$[x_1, x_2]$	308—302 = 6	*
	$[x_2, x_7]$	$[x_1, x_2]$	309—302 = 7	$\alpha_0 = 6$
	$[x_3, x_5]$	$[x_2, x_6]$	317— 14 = 303	
	$[x_3, x_7]$	$[x_2, x_7]$	313— 7 = 306	
	$[x_6, x_7]$	$[x_2, x_6]$	31— 14 = 17	
B	$[x_1, x_8]$ $[x_1, x_4]$	$x_1, x_2]$, $[x_4, x)]$	(321+315)— (302+ 15)=319	
	$[x_1, x_4]$, $[x_1, x_5]$	$[x_1, x_2]$, $[x_4, x_5]$	(315+310)— (302+ 12)=311	
	$[x_1, x_5]$, $[x_1, x_3]$	$[x_1, x_2]$, $[x_3, x_5]$	(310+607)— (302+311)=304	
	$[x_6, x_8]$, $[x_4, x_5]$	$[x_2, x_6]$, $[x_4, x_8]$	(36+ 32)—(14+15) (14+ 15)= 39	
	$[x_4, x_6]$, $[x_5, x_6]$	$[x_3, x_6]$, $[x_4, x_5]$	(32+ 42)— (14+ 12)= 48	
	$[x_5, x_6]$ $[x_3, x_6]$	$[x_2, x_6]$, $[x_3, x_5]$	(32+317)— (14+311)= 34	$\beta_0 = 7$
	$[x_7, x_8]$, $[x_4, x_7]$	$[x_2, x_7]$, $[x_4, x_8]$	(18+ 21)— (7+ 15)= 17	*
	$[x_4, x_7]$, $[x_5, x_7]$	$[x_3, x_7]$, $[x_4, x_5]$	(21+ 38)— (7+ 12)= 40	
	$[x_5, x_7]$, $[x_3, x_7]$	$[x_2, x_7]$, $[x_3, x_5]$	(38+313)— (7+311)= 33	
	$[x_1, x_8]$	$[x_2, x_8]$	321—2=319	γ_0=16
	$[x_6, x_8]$	$[x_2, x_8]$	36—2=34	
	$[x_7, x_8]$	$[x_4, x_8]$	18—2=16	*

Se execută operația A corespunzătoare, adică muchia $[x_1, x_2]$ este suprimată și se introduce în arbore muchia

$[x_1, x_6]$, obținînd arborele din figura III.3.22, de valoare $L_2 = L_1 + 6 = 669$, în care nodul x_2 are gradul mai mic, anume $g(x_2) = 3$.

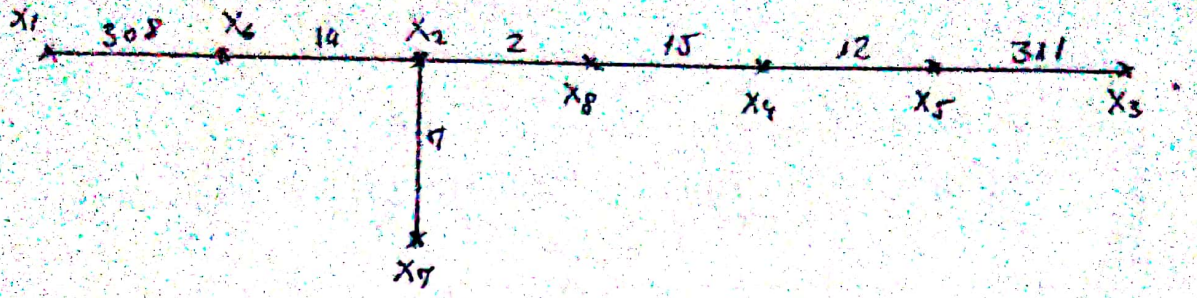


Fig. III.3.22

Trebuie micșorat gradul lui x_2, singurul nod de grad mai mare decît 2, în următoarea iterație. Calculele corespunzătoare sînt redate în tabelul III.3.33. Avem:

$$\min(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) = \gamma_0 = 16$$

Tabelul III.3.33

Operația	Muchii introduse	Muchii suprimate	Creșterea lungimii arborelui	Creșterea minimă la fiecare operație
A	$[x_1, x_3]$	$[x_2, x_7]$	607—14=593	$\alpha_0 = 295$
	$[x_1, x_7]$	$[x_2, x_6]$	309—14=295	
	$[x_3, x_7]$	$[x_2, x_6]$	313—7=306	
B	$[x_1, x_7]$, $[x_6, x_7]$	$[x_2, x_7]$, $[x_1, x_6]$	(309 + 21)— (7 +308)=25	
	$[x_7, x_8]$, $[x_4, x_7]$	$[x_2, x_7]$, $[x_4, x_8]$	(18 + 21)— (7 + 15)=17	$\beta_0 = 17$
	$[x_4, x_7]$ $[x_5, x_7]$	$[x_2, x_7]$, $[x_4, x_5]$	(21 + 38)— (7 + 12)=40	
	$[x_6, x_7]$ $[x_3, x_7]$	$[x_2, x_7]$, $[x_3, x_5]$	(38+313)— (7 +311)=33	
C	$[x_1, x_7]$	$[x_2, x_6]$	31 —14= 17	$\gamma_0 = 16$
	$[x_3, x_6]$	$[x_2, x_6]$	317—14=303	
	$[x_7, x_8]$	$[x_2, x_6]$	18 — 2= 16	
	$[x_1, x_6]$	$[x_2, x_6]$	321— 2=319	

Se execută operația C de suprimare a muchiei $[x_2, x_6]$ și introducerea muchiei $[x_7, x_8]$, obținînd arborele din

figura III.3.23, în care toate nodurile au gradele 1 sau 2, deci este lanțul hamiltonian căutat, de valoare $L_3 = L_2 + 16 = 635$. Se scad valorile $k = 300$, de pe muchiile $[x_1, x_6]$ și $[x_3, x_5]$, obținînd LHM_{13} de valoare = 85, în probleme de colectare inițială (vezi figura III.3.24).

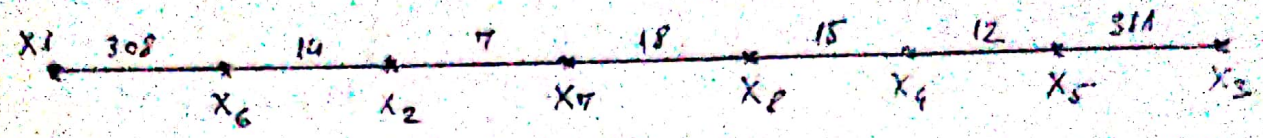


Fig. III.3.23

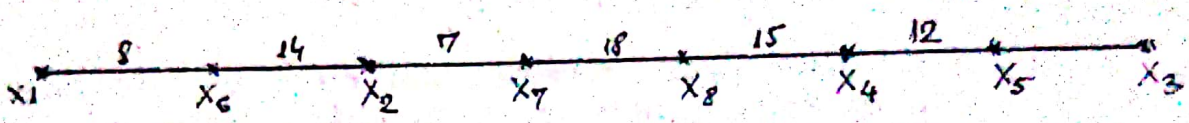


Fig. III.3.24

Observație. Se poate verifica cu algoritmul care va fi prezentat în continuare (algoritmul lui Christofides) că s-a obținut chiar $LHM_{1,3}$.

Direct, calculînd toate valorile lanțurilor hamiltoniene de extremități fixate, x_1 și x_3, problema ar avea mari dificultăți de calcul, existînd $6! = 720$ lanțuri hamiltoniene cu aceste extremități.

Algoritmul lui Christofides. Christofides a conceput algoritmul pe care îl vom prezenta în continuare, pentru o problemă de tipul P_2, de găsire a unui lanț hamiltonian minim de extremități fixate: $LHM_{i_1 i_2}$.

Ideea de la care a plecat algoritmul este următoarea: se definește un vector p, de componente $p(i)$, (cu $i = 1, 2, \ldots, n$), care sînt numere reale nenegative, arbitrar alese și matricea V', cu proprietatea: $v'_{ij} = v_{ij} + p(i) + p(j)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$; $i \neq j$. În graful de matrice a valorilor V' nu se produc schimbări în ordonarea după valori a lanțurilor hamiltoniene de extremități fixate, x_{i_1} și x_{i_2}, adică, două lanțuri hamiltoniene de extremități x_{i_1} și x_{i_2}, avînd respectiv lungimile l_1 și l_2, cu $l_1 < l_2$, devin, relativ la matricea V', cu lungimi l'_1 și l'_2, respectiv, cu $l'_1 < l'_2$, deoarece:

$$l'_1 = l_1 + p(x_{i_1}) + p(x_{i_2}) + 2 \sum_{i \neq x_{i_1}, x_{i_2}} p(i)$$

$$l'_2 = l_2 + p(x_{i_1}) + p(x_{i_2}) + 2 \sum_{i \neq x_{i_1}, x_{i_2}} p(i)$$

și, deci, $l'_2 - l'_1 = l_2 - l_1$.

Descrierea algoritmului. Pasul 1. În graful dat, cu matricea valorilor modificată prin adăugarea unei constante suficient de mari la liniile și coloanele de indici i_1 și i_2, se determină un arbore economic.

Dacă arborele-economic are numai noduri de grad 1 și 2, atunci este chiar un $LHM_{i_1 i_2}$. Dacă există și noduri z, de grad $g(z) \geqslant 3$, se trece la pasul următor.

Pasul 2. Se definește un vector $p \in R^n$, de componente:

$$p(i) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } i \text{ este un nod cu: } g(i) \in \{1, 2\}, \\ k[g(i) - 2], & \text{dacă } i \text{ are un grad: } g(i) \geqslant 3. \end{cases}$$

Constanta k este aleasă arbitrar, dar cu o valoare nu prea mare față de datele problemei. Se modifică matricea V în matricea V', după formula: $v'_{ij} = v_{ij} + p(i) + p(j)$, $(i \neq j)$; $i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

În graful de matrice a valorilor V' se determină din nou un arbore economic. Dacă acest nou arbore are toate nodurile de grad 1 sau 2, atunci el este un lanț hamiltonian și anume un LHM_{i_1, i_2} și algoritmul ia sfîrșit. În caz contrar, se reaplică pasul 2, definind un nou vector de penalizare p, o nouă matrice a valorilor V'' și un alt arbore economic, ș.a.m.d.

Observație. Vectorul p produce penalizarea acelor vîrfuri cu grad mai mare decît 2 și mărind valoarea muchiilor adiacente cu astfel de noduri, se poate ca, în noul arbore-economic să nu mai fie selectate toate aceste muchii, deci arborele minim se apropie de un lanț hamiltonian.

Notă. În aplicarea metodei de penalizare se pot da valori diferite, de la pas la pas, pentru constanta de penalizare k. Se poate întîmpla însă ca, pe parcursul aplicării algoritmului, să se obțină aceiași arbori care nu sînt lanțuri, sau ca iterațiile să nu se sfîrșească niciodată, deoarece algoritmul nu are un număr finit de pași în toate cazurile posibile. Dificultatea algoritmului constă în aceea că nu cunoaștem aprioric valorile constantei de penalizare, care să ne conducă cel mai rapid la soluție.

Exemplu. Reluăm problema de colectare, din exemplul precedent cu algoritmul euristic de aproximare a unui LHM_{13}. Datele problemei, din tabelul III.3.29, se transformă, prin adunarea constantei 300 la liniile și coloanele de indici 1 și 3 (exceptînd elementele diagonale) în matricea V din tabelul III.3.30. Este dedus arborele economic din figura III.3.20, avînd valoarea $L = 660$ și cu două noduri de grad mai mare

decît doi: $g(x_2) = 4$, $g(x_4) = 3$. Se trece la pasul 2 al algoritmului lui Christofides, alegînd o constantă de penalizare arbitrară, fie $k = 4$ (vom păstra această constantă pe tot parcursul aplicării algoritmului). Deci:

$$p(i) = \begin{cases} 0, & i \in [x_1, x_3, x_5, x_6, x_7, x_8], \\ 8, & i = x_2, \\ 4, & i = x_4, \end{cases}$$

adică: $p = (0, 8, 0, 4, 0, 0, 0, 0)$. Se modifică matricea V în V', conform calculelor din tabelul III.3.34.

Tabelul III.3.34

(V'):

De la \ la	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	310	607	319	310	308	309	321
x_2	310	0	331	57	43	22	15	10
x_3	607	331	0	312	311	317	313	322
x_4	319	57	312	0	16	36	25	19
x_5	310	43	311	16	0	42	38	19
x_6	308	22	317	36	42	0	31	36
x_7	309	15	313	25	38	31	0	18
x_8	321	10	322	19	19	36	18	0

Arborele economic, corespunzător matricei V', este cel reprezentat în figura III.3.25, în care numai vîrful x_2 are grad mai mare decît doi: $g(x_2) = 3$.

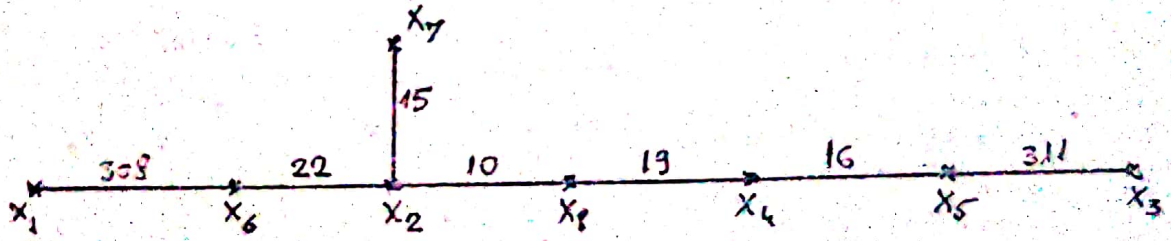


Fig. III.3.25

Alegem vectorul de penalizare p, cu componentele:

$$p(i) = \begin{cases} 0, & i \in X \setminus \{x_2\}, \\ 4(3-2), & i = x_2. \end{cases}$$

Deci $x = (0, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Noua matrice a valorilor, V'', este calculată în tabelul III.3.35.

Tabelul III.3.35

(V''):

De la \ la	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	314	607	319	310	308	309	321
x_2	314	0	335	61	47	26	19	14
x_3	607	335	0	312	311	317	313	322
x_4	319	61	312	0	16	36	25	19
x_5	310	47	311	16	0	42	38	19
x_6	308	26	317	36	42	0	31	36
x_7	309	19	313	25	38	31	0	18
x_8	321	14	322	19	19	36	18	0

Arborele economic corespunzător acestei matrici este ilustrat în figura III.3.26, în care singurul nod de grad mai mare decît doi este x_8, cu $g(x_8) = 3$.

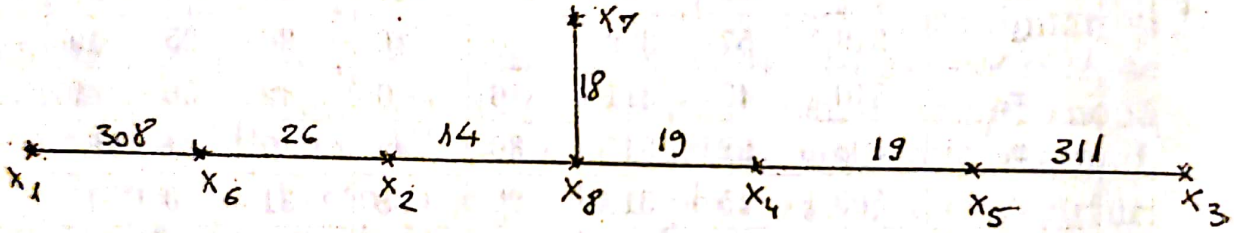


Fig. III.3.26

Se alege un nou vector de penalizare: $p = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4)$ cu care generăm o nouă matrice modificată a valorilor, V''', dată de tabelul III.3.36.

Tabelul III.3.36

(V^{III}):

De la \ la	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	314	607	319	310	308	309	325
x_2	314	0	335	61	47	26	19	18
x_3	607	335	0	312	311	317	313	326
x_4	319	61	312	0	16	36	25	23
x_5	310	47	311	16	0	42	38	23
x_6	308	26	317	36	42	0	31	40
x_7	309	19	313	25	38	31	0	22
x_8	325	18	326	23	23	40	22	0

Scanned with OKEN Scanner

Pentru aceste date se obține iar aborele economic din figura III.3.25, în care x_2 este singurul nod de grad mai mare decît 2, anume $g(x_2) = 3$. Se introduce vectorul de penalizare:

$$p = (0, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Datele se vor modifica în tabelul III.3.37 și arborele economic este din nou cel din figura III.3.26, cu $g(x_8) = 3$. Repetăm în tabelul III.3.38 calculul cu vectorul de penalizare $p = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4)$.

Tabelul III.3.37

(V^{IV}):

De la \ la	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	318	607	319	310	308	309	325
x_2	318	0	339	65	51	30	23	22
x_3	607	339	0	312	311	317	313	326
x_4	319	65	312	0	16	36	25	23
x_5	310	51	311	16	0	42	38	23
x_6	308	30	312	36	42	0	31	40
x_7	309	23	313	25	38	31	0	22
x_8	325	22	326	23	23	40	22	0

Tabelul III.3.38

(V^{V}):

De la \ la	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	318	607	319	310	308	309	329
x_2	318	0	339	65	51	50	23	26
x_3	607	339	0	312	311	317	313	330
x_4	319	65	312	0	16	36	25	27
x_5	310	51	311	16	0	42	38	27
x_6	308	30	317	36	42	0	31	44
x_7	309	23	313	25	38	31	0	26
x_8	329	26	330	27	27	44	26	0

Scanned with OKEN Scanner

În această etapă, se obțin doi arbori economici (vezi figura III.3.27), în care unul este chiar LHM_{13}. În figura III.3.28 sînt trecute valorile inițiale (din tabelul III.3.29) pentru soluția optimă, adică LHM_{13} căutat. Este aceeași soluție ca la aplicarea algoritmului euristic de aproximare.

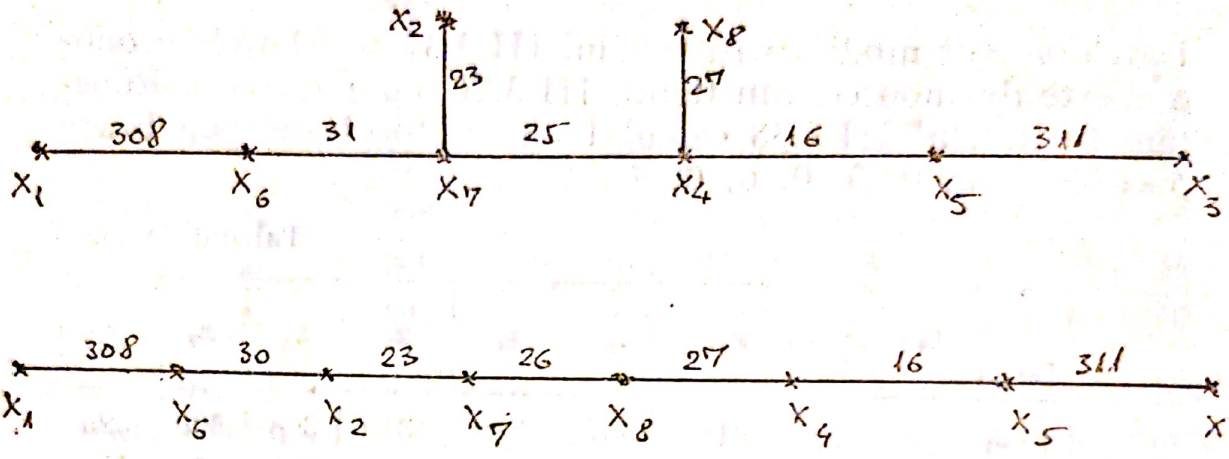


Fig. III.3.27

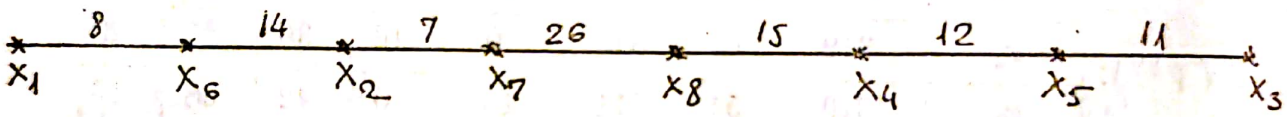


Fig. III.3.28

Probleme rezolvate

1. Un produs finit poate fi verificat în privința respectării indicilor de calitate pe la șapte puncte de control. Procesul de producție este automatizat și trecerea se face pe bandă rulantă. Cum fiecare punct de control verifică o anumită calitate a produsului, bine determinată, găsiți posibilitatea de a folosi într-o anumită ordine aceste puncte de control, astfel încît verificarea să fie completă. Graful corespunzător se găsește în figura III.3.29.

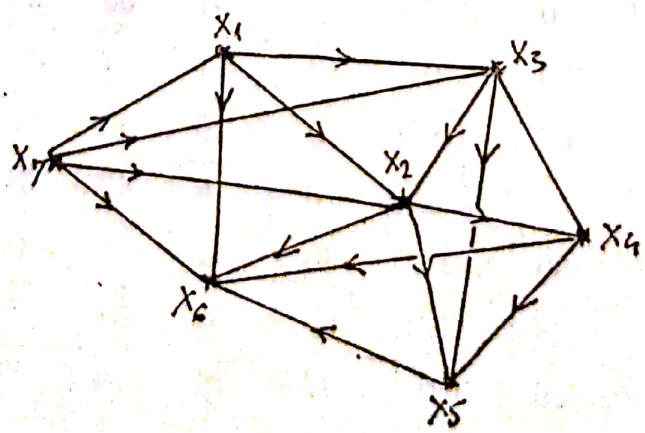


Fig. III.3.29

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Graful nu are circuite. Într-adevăr, folosind matricea arcelor din tabelul III.3.39, se obține matricea drumurilor din tabelul III.3.40, aceasta neavînd nici un

Tabelul III.3.39

(A):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	0	1	0	1	1	0
x_2	0	0	0	1	1	1	0
x_3	0	1	0	1	1	0	0
x_4	0	0	0	0	1	1	0
x_5	0	0	0	0	0	1	0
x_6	0	0	0	0	0	0	0
x_7	1	1	1	0	0	1	0

Tabelul III.3.40

(D):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$p(x_i)$
x_1	0	1	1	1	1	1	0	5
x_2	0	0	0	1	1	1	0	3
x_3	0	1	0	1	1	1	0	4
x_4	0	0	0	0	1	1	0	2
x_5	0	0	0	0	0	1	0	1
x_6	0	0	0	0	0	0	0	0
x_7	1	1	1	1	1	1	0	6

element egal cu unu pe diagonala principală. În tabelul III.3.40 sînt calculate și puterile de atingere ale vîrfurilor grafului. După cum se vede, avem:

$$\sum_{i=1}^{7} p(x_i) = 21 = \frac{7 \cdot 6}{2}.$$

Ca urmare, graful dat are un drum hamiltonian, acesta avînd forma următoare:

$$\mathrm{DH} = (x_7,\ x_1,\ x_3,\ x_2,\ x_4,\ x_5,\ x_6).$$

Scanned with OKEN Scanner

2. Într-o hală industrială, procesul de producție se desfășoară pe un sistem de benzi rulante, care leagă șase puncte de lucru, ca în figura III.3.30. În fiecare din aceste puncte de lucru se execută cîte o anumită operație. Întreprinderea asimilează un produs nou, care trebuie să treacă prin toate cele șase operații, deci pe la toate punctele de lucru. Arătați dacă sistemul de benzi rulante existent în hală permite acest lucru, iar dacă nu, indicați o modificare tehnică cît mai simplă care să ducă la soluționarea problemei.

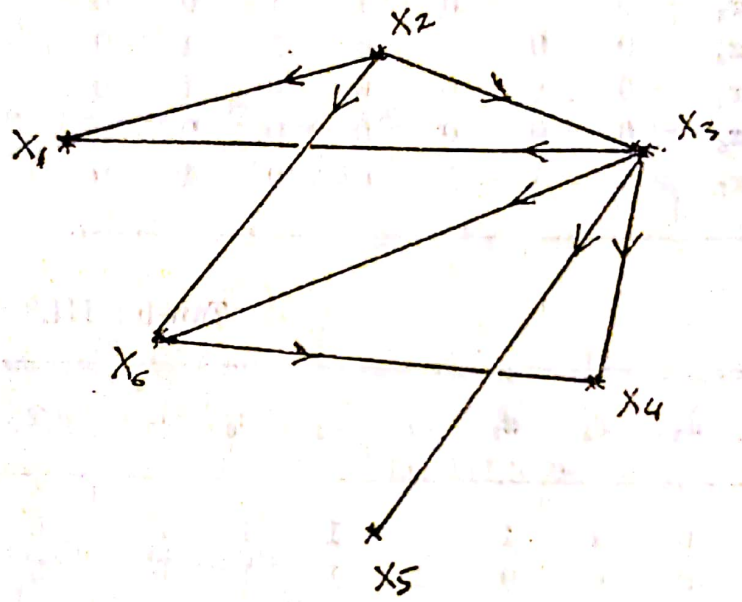


Fig. III.3.30

Rezolvare. Matricea arcelor grafului, din tabelul III.3.41, conduce la matricea drumurilor din tabelul III.3.42. Cercetînd acest din urmă tabel, observăm că graful este fără circuite

Tabelul III.3.41

(A):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	0	0	0	0	0
x_2	1	0	1	0	0	1
x_3	1	0	0	1	1	1
x_4	0	0	0	0	1	0
x_5	0	0	0	0	0	0
x_6	0	0	0	1	0	0

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul III.3.42

(D):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$p(x_i)$
x_1	0	0	0	0	0	0	0
x_2	1	0	1	1	1	1	5
x_3	1	0	0	1	1	1	4
x_4	0	0	0	0	1	0	1
x_5	0	0	0	0	0	0	0
x_6	0	0	0	1	1	0	2
				$\sum p(x_i)$			12

și $\sum_{i=1}^{6} p(x_i) = 12 \neq \frac{6 \cdot 5}{2}$. În consecință nu există drum hamiltonian. Pentru ca produsul să poată trece pe la toate punctele de lucru, căutăm să scriem forma triangularizată, ordonînd vîrfurile care au aceeași putere de atingere după criteriul unui număr mai mic de zerouri în coloana corespunzătoare din D, deoarece astfel numărul elementelor egale cu zero situate imediat deasupra diagonalei principale va fi mai mic.

Alegem ordinea $(x_2, x_3, x_6, x_4, x_5, x_1)$ care va da un drum hamiltonian dacă se construiește o bandă rulantă între punctele x_5 și x_1, după cum rezultă din forma triangularizată ce se găsește în tabelul III.3.43.

Cu construcția benzii de la x_5 la x_1 produsul trece prin toate cele 6 operații, în ordinea: x_2, x_3, x_6, x_4, x_5, x_1.

Tabelul III.3.43

(D):

	x_2	x_3	x_6	x_4	x_5	x_1
x_2	0	1	1	1	1	1
x_3	0	0	1	1	1	1
x_6	0	0	0	1	1	0
x_4	0	0	0	0	1	0
x_5	0	0	0	0	0	0
x_1	0	0	0	0	0	0

Scanned with OKEN Scanner

Dacă nu am fi respectat regula de a ordona vîrfurile cu aceeași putere de atingere după numărul mai mic de zerouri din coloana corespunzătoare din D, atunci ordinea era: x_2, x_3, x_4, x_1, x_5, dar se construiau două benzi rulante, între x_4 și x_1, ca și între x_1 și x_5, deci nu constituie cea mai simplă soluție tehnică.

3. Un inspector trebuie să facă un control asupra celor cinci unități de alimentație publică din cadrul unei stațiuni montane. Posibilitățile de acces între aceste unități sînt reprezentate în tabelul-graf din figura III.3.31, prin arce. Se pune problema, cum trebuie să procedeze inspectorul pentru a controla toate unitățile, deci care este unitatea cu care trebuie să înceapă controlul și ordinea în care va controla celelalte unități.

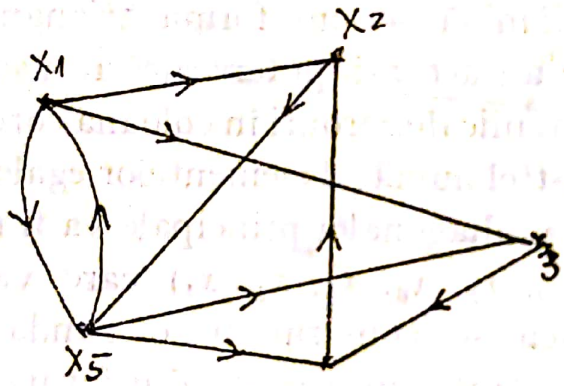


Fig. III.3.31

Rezolvare. Graful are, evident, circuite. Să aplicăm algoritmul Kaufmann. Pentru aceasta se folosesc matricele $\mathcal{M}^{(1)}$ și $\tilde{\mathcal{M}}^{(1)}$ din tabelele III.3.44 și III.3.45.

Tabelul III.3.44

$\mathcal{M}^{(1)}$:

0	x_1x_2	x_1x_3	0	x_1x_5
0	0	0	0	x_2x_5
0	0	0	x_3x_4	0
0	x_4x_2	0	0	0
x_5x_1	0	x_5x_3	x_5x_4	0

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul III.3.45

$\widetilde{\mathcal{M}}^{(1)}$:

$\emptyset$	x_2	x_3	$\emptyset$	x_5
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	x_5
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	x_4	$\emptyset$
$\emptyset$	x_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
x_1	$\emptyset$	x_3	x_4	$\emptyset$

Cu rezultatele intermediare din tabelele III.3.46 și III.3.47, se obține rezultatul final din tabelul III.3.48.

Tabelul III.3.46

$\mathcal{M}^{(2)}$:

$\emptyset$	$\emptyset$	$x_1x_5x_3$	$x_1x_3x_4$ $x_1x_5x_4$	$x_1x_2x_5$
$x_2x_5x_1$	$\emptyset$	$x_2x_5x_3$	$x_2x_3x_5$	$\emptyset$
$\emptyset$	$x_3x_4x_2$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$x_4x_2x_5$
$\emptyset$	$x_5x_1x_2$ $x_5x_4x_2$	$x_5x_1x_3$	$x_5x_3x_4$	$\emptyset$

Tabelul III.3.47

$\mathcal{M}^{(3)}$:

$\emptyset$	$x_1x_3x_4x_2$ $x_1x_5x_4x_2$	$x_1x_2x_5x_3$	$x_1x_5x_3x_5$ $x_1x_2x_5x_4$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$x_2x_5x_1x_3$	$x_2x_5x_3x_4$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$x_3x_4x_2x_5$
$x_4x_2x_5x_1$	$\emptyset$	$x_4x_2x_5x_2$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\emptyset$	$x_5x_3x_4x_2$	$\emptyset$	$x_5x_1x_3x_4$	$\emptyset$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul III.3.48

$\mathcal{M}^{(4)}$:

$\emptyset$	$x_1x_5x_3x_4x_2$	$\emptyset$	$x_1x_2x_5x_3x_4$	$x_1x_3x_4x_2x_5$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$x_2x_5x_1x_3x_4$	$\emptyset$
$x_3x_4x_2x_5$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$x_4x_2x_5x_1x_3$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\emptyset$	$x_5x_1x_3x_4x_2$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Matricea $\mathcal{M}^{(4)}$ dă toate drumurile hamiltoniene, în număr de șapte. Se vede că se poate începe controlul cu oricare unitate. Între aceste variante se alege una după un anumit criteriu de optim. Cele șapte drumuri hamiltoniene sînt următoarele:

$$DH_1 = (x_1, x_5, x_3, x_4, x_2), \quad DH_5 = (x_3, x_4, x_2, x_3, x_1),$$
$$DH_2 = (x_1, x_2, x_5, x_3, x_4), \quad DH_6 = (x_4, x_2, x_5, x_1, x_3),$$
$$DH_3 = (x_1, x_3, x_4, x_2, x_5), \quad DH_7 = (x_5, x_1, x_3, x_4, x_2).$$
$$DH_4 = (x_2, x_5, x_1, x_3, x_4),$$

4. Trebuie stabilit traseul unui raliu care să treacă prin zece localități. Șoselele existente între localitățile respective au fie sens unic, fie ambele sensuri de circulație și au ca model un graf cu imaginea din figura III.3.32. Trebuie stabilit

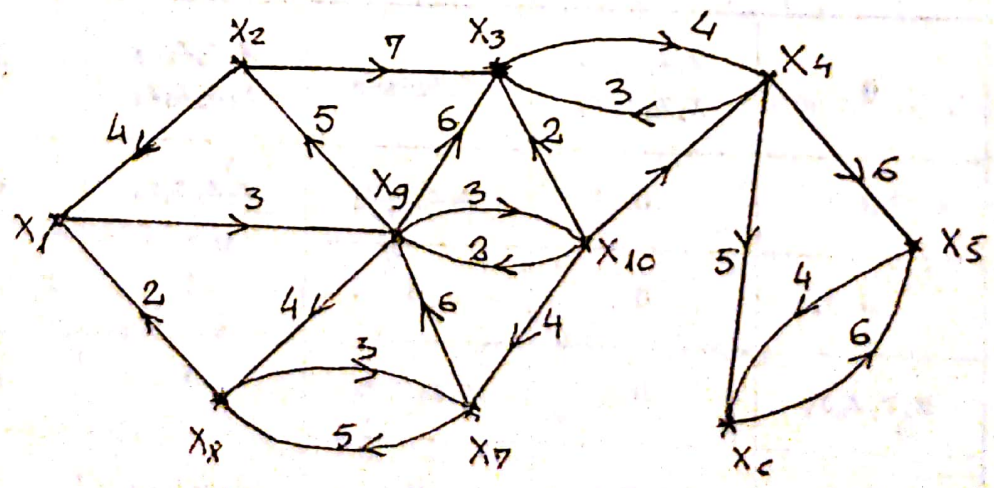


Fig. III.3.32

din ce localitate trebuie să pornească raliul și care este traseul prin celelalte localități. Dacă s-a cronometrat și timpul mediu de parcurgere a fiecărei porțiuni de șosea cu automobilul (în ore), care este decizia cea mai bună de stabilire a traseului?

Rezolvare. Trebuie cercetat dacă acest graf cu circuite admite existența unui drum hamiltonian, iar în cazul existenței a mai multor drumuri hamiltoniene trebuie determinat cel minim (DHM).

Algoritmul Kaufmann este mai greu de aplicat pentru întregul graf, deoarece matricea $\mathcal{M}^{(9)}$ va avea ordinul 10×10 și în fiecare căsuță se poate trece $\emptyset$ sau o succesiune de 10 litere. De aceea, construim întîi graful condensat și stabilim drumurile hamiltoniene în fiecare componentă tare conexă cu algoritmul lui Kaufmann.

Tabelul III.3.49 conține calculele pentru determinarea componentelor tare conexe.

Tabelul III.3.49

A:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	V_1'	V_2'	V_3'
x_1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	X	X
x_2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	X	X
x_3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	X
x_4	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	X
x_5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
x_6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
x_7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	X
x_8	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	X	X
x_9	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	X	X
x_{10}	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	X	X
V_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			
V_1	X	X	1	1	1	1	X	X	X	X			
V_3	X	X	X	X	1	1	X	X	X	X			

Scanned with OKEN Scanner

Avem:

$$C_1 = C(x_1) = (V_1 \cap V_1') \cup \{x_1\} = \{x_1, x_2, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$$
$$C_2 = C(x_3) = (V_2 \cap V_2') \cup \{x_3\} = \{x_3, x_4\}$$
$$C_3 = C(x_5) = (V_3 \cap V_3') \cup \{x_5\} = \{x_5, x_6\}$$

Cu ajutorul tabelelor III.3.50 și III.3.51, s-a calculat matricea arcelor grafului condensat, din tabelul III.3.52.

Tabelul III.3.50

$(\widetilde{A})$:

	C_1	C_2	C_3
x_1	1	0	0
x_2	1	1	0
x_3	0	1	0
x_4	0	1	1
x_5	0	0	1
x_6	0	0	1
x_7	1	1	0
x_8	1	0	0
x_9	1	1	0
x_{10}	1	1	0

Tabelul III.3.51

$(\widetilde{\widetilde{A}})$:

	C_1	C_2	C_3
C_1	1	1	0
C_2	0	1	1
C_3	0	0	1

Tabelul III.3.52

(A^*):

	C_1	C_1	C_1
C_1	0	1	0
C_2	0	1	1
C_3	0	0	0

Scanned with OKEN Scanner

Graful condensat are, deci, imaginea din figura III.3.33.

Deoarece G^* nu are circuite, determinăm matricea D^* și puterile de atingere ale celor trei „vîrfuri", C_1, C_2, C_3. Această matrice se găsește în tabelul III.3.53.

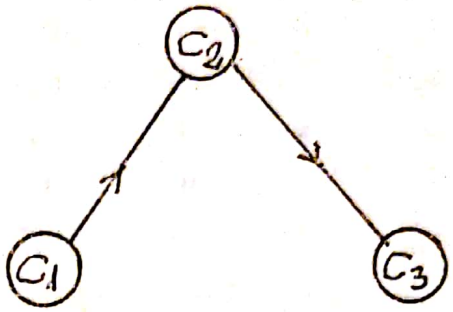


Fig. III.3.33

Tabelul III.3.53

(D^*):

	C_1	C_2	C_3	$P(C_i)$
C_1	0	1	1	2
C_2	0	0	0	1
C_3	0	0	0	0

Avem:

$$\sum_{i=1}^{3} P(C_i) = 2 + 1 + 0 = 3 = \frac{3 \cdot 2}{2},$$

deci, există $DH^* = (C_1, C_2, C_3)$.

În C_1 aplicăm algoritmul Kaufmann pentru determinarea drumurilor hamiltoniene în acest subgraf cu șase vîrfuri. Pentru simplitatea scrierii, convenim să trecem secvențele numai prin intermediul indicilor, adică ij în loc de $x_i x_j$.

În tabelele III.3.54—III.3.59 sînt efectuate calculele, ultima matrice furnizînd rezultatul. Astfel:
din matricea $\mathcal{M}^{(5)}$ citim cele două drumuri hamiltoniene din componenta C_1, anume:

$$\overline{DH}_1 = (x_2, x_1, x_9, x_{10}, x_7, x_8),$$

$$\overline{DH}_2 = (x_{10}, x_7, x_8, x_1, x_9, x_2).$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul III.3.54

$\mathcal{M}^{(1)}$

	x_1	x_2	x_7	x_8	x_9	x_{10}
x_1	0	0	0	0	1,9	0
x_2	2,1	0	0	0	0	0
x_7	0	0	0	0	7,8	7,9
x_8	8,1	0	8,7	0	0	0
x_9	0	9,2	0	9,8	0	9,10
x_{10}	0	0	10,7	0	10,9	0

Tabelul III.3.55

$\widetilde{\mathcal{M}}^{(1)}$

	x_1	x_2	x_7	x_8	x_9	x_{10}
x_1	0	0	0	0	9	0
x_1	1	0	0	0	0	0
x_7	0	0	0	8	9	0
x_8	1	0	7	0	0	0
x_9	0	2	0	8	0	10
x_{10}		0	7	0	9	0

Tabelul III.3.56

$\mathcal{M}^{(2)}$:

	x_1	x_2	x_7	x_8	x_9	x_{10}
x_1	0	1,9,2	0	1,9,8	0	1,9,10
x_2	0	0	0	0	2,1,9	0
x_7	7,8,1	7,9,2	0	7,9,8	0	7,9,10
x_8	0	0	0	0	8,1,9	0
					8,7,9	0
	9,2,1		9,8,7			
x_9	9,8,1	0	9,10,7	0	0	0
x_{10}	0	10,9,2	0	10,7,8		
				10,9,8	10,7,9	0

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul III.3.5 -

$\mathcal{M}^{(3)}$:

	x_1	x_2	x_7	x_8	x_9	x_{10}
x_1	0	0	1,9,8,7 1,9,10,7	0	0	0
x_2	0	0	0	2,1,9,8	0	2,1,9,10
x_7	7,9,2,1 7,9,8,1	0	0	0	7,8,1,9	0
x_8	0	8,1,9,1 8,7,9,2				8,1,9,10 8,7,9,10
x_9	0 10,9,2,1	0	0	9,10,7,8	0	0
x_{10}	10,8,7,1 10,9,8,1	10,7,9,2	 10,9,8,7	10,7,9,8	0	0

Tabelul III.3.58

$\mathcal{M}^{(4)}$:

	x_1	x^2	x_7	x_9	x_8	x_{10}
x_1	0	0	0	1,9,10,7,8	0	0
x_2	0	0	2,1,9,8,7 2,1,9,10,7	0	0	0
x_7	0	7,8,1,9,2	0	0	0	7,8,1,9,10
x_8	8,7,9,2,1	0	8,1,9,10,7	0	0	0
x_9	9,10,7,8,1 10,7,9,2,1	0	0	0	0	0
x_{10}	10,7,9,8,1	0	0	0	10,7,8,1,9	0

Tabelul III.3.59

$\mathcal{M}^{(5)}$:

	x_1	x_2	x_7	x_8	x_9	x_{10}
x_1	0	0	0	0	0	0
x_2	0	0	0	2,1,9,10,7,8	0	0
x_7	0	0	0	0	0	0
x_8	0	0	0	0	0	0
x_9	0	0	0	0	0	0
x_{10}	0	10,7,8,1,9,2	0	0	0	0

Scanned with OKEN Scanner

Componentele C_2 și C_3 au numai cîte două vîrfuri, deci drumurile lor hamiltoniene vor fi:

$$(x_3,\ x_4) \text{ și } (x_4,\ x_3) \text{ în } C_2,$$

$$(x_5,\ x_6) \text{ și } (x_6,\ x_5) \text{ în } C_3.$$

Cercetăm legăturile între ultimul vîrf din $\overline{DH_1}$ și $\overline{DH_2}$ din C_1 și primul vîrf din componenta ce urmează în DH*, anume C_2, apoi între ultimul vîrf din C_2 și primul din componenta ce sfîrșește DH* în G^*, adică C_3. Avem schema din tabelul III.3.60.

Tabelul III.3.60

C_1	C_2	C_3
$x_2,\ x_1,\ x_9,\ x_{10},\ x_7,\ x_8$	$x_3,\ x_4$	$x_5,\ x_6$
$x_{10},\ x_7,\ x_8,\ x_1,\ x_9,\ x_2$	$x_4,\ x_3$	$x_6,\ x_5$

Rezultă două drumuri hamiltoniene pentru graful inițial:

$$DH_1 = (x_{10},\ x_7,\ x_8,\ x_1,\ x_9,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6),$$

de valoare egală cu 40 ore,

$$DH_2 = (x_{10},\ x_7,\ x_8,\ x_1,\ x_9,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_6,\ x_5)$$

de valoare egală cu 41 ore, deci trebuie ales raliul pe traseul dat de DH_1.

Probleme date spre rezolvare

5. Prelucrarea unui obiect artizanal poate trece prin șase faze distincte, notate într-un model de graf (vezi figura III.3.34), prin $x_i (i = 1, 2, \ldots, 6)$, iar posibilitățile de trecere de la o fază al alta sînt reprezentate prin arce. Este

Scanned with OKEN Scanner

posibil ca obiectul să treacă prin toate fazele de prelucrare? Dacă acest lucru este posibil, indicați tehnologia corespunzătoare.

Răspuns. $(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3)$.

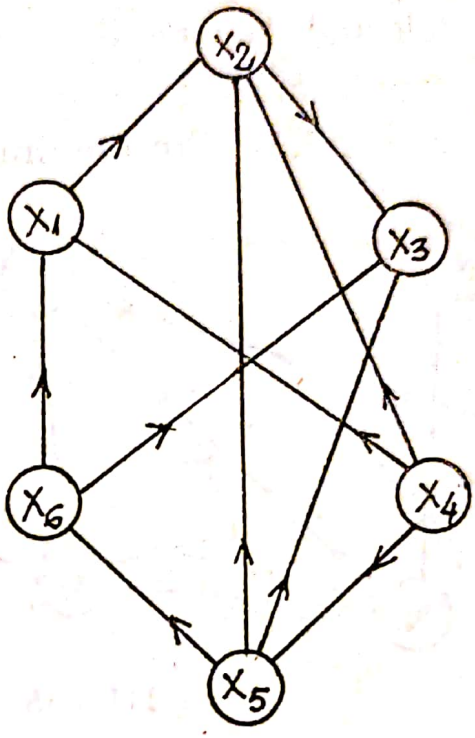


Fig. III.3.34

6. Prelucrarea unei piese trebuie să treacă prin șapte operații notate $x_1, x_2, \ldots, x_7$. Condițiile tehnice de prelucrare sînt respectate în mod ideal dacă se ține seama de următoarele recomandări teoretice:

— operația x_1 este anterioară operației x_7;

— operația x_2 este anterioară operațiilor x_1, x_4 și x_5;

— operația x_3 se poate executa înaintea operațiilor x_2, x_4 și x_6;

— operația x_4 este anterioară operațiilor x_1 și x_5;

— operația x_5 este ultima operație de prelucrare;

— operația x_6 se poate executa înaintea operațiilor x_2, x_5 și x_7;

— operația x_7 este anterioară operației x_5.

Scanned with OKEN Scanner

Să se cerceteze dacă piesa poate trece prin toate operațiile de prelucrare și, în caz alternativ, să se precizeze tehnologia corespunzătoare.

Răspuns. $(x_3, x_6, x_2, x_4, x_1, x_7, x_5)$.

7. În prelucrarea sa, un produs trebuie să treacă prin șapte secții, folosind benzile de transport existente, între aceste secții, reprezentate prin arce într-un model cu imaginea din figura III.3.35. Presupunînd că nu există o ordine

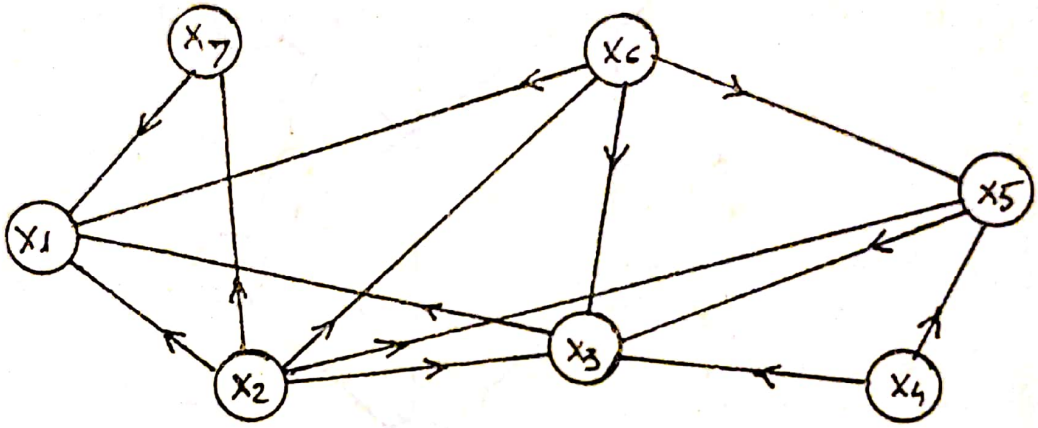


Fig. III.3.35

preferențială în prelucrarea produsului prin secții, să se arate dacă sistemul de benzi existent poate asigura transportul efectiv al produsului succesiv prin toate secțiile, iar dacă nu, ce benzi mai trebuie să construim (cît mai puține la număr), astfel încît să se rezolve problema transportului.

Răspuns. Prin introducerea a două benzi transportoare, între secțiile (x_6, x_4) și între secțiile (x_3, x_7), produsul va trece prin toate secțiile în ordinea:

$$(x_2, x_6, x_4, x_5, x_3, x_7, x_1).$$

8. Între cele două puncte de lucru dintr-o secție uzinală s-au construit benzi transportoare care să permită transportul pieselor de la un punct la altul. Modelul cu care se studiază acest transport este un graf cu imaginea geometrică din

Scanned with OKEN Scanner

figura III.3.36. Să se stabilească cum se poate organiza transportul după un drum hamitonian.

Răspuns. $DH_1 = (x_2, x_1, x_7, x_8, x_6, x_9, x_3, x_4, x_5)$; $DH_2 = (x_2, x_1, x_7, x_8, x_6, x_5, x_4, x_9, x_3)$; $DH_3 = (x_2, x_1, x_7, x_8, x_6, x_5, x_9, x_3, x_4)$; $DH_4 = (x_2, x_8, x_1, x_7, x_6, x_9, x_3, x_4, x_5)$; $DH_5 = (x_2, x_8, x_1, x_8, x_6, x_5, x_4, x_9, x_3)$; $DH_6 = (x_2, x_8, x_1, x_7, x_6, x_5, x_9, x_3, x_4)$.

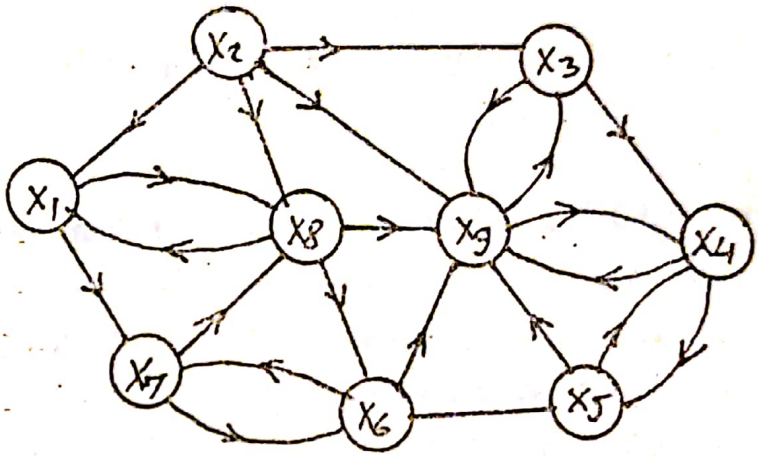


Fig. III.3.36

9. Aprovizionarea celor șase puncte, ale unui sistem comercial, trebuie să se facă cu ajutorul unui singur mijloc de transport, folosind rețeaua din figura III.3.37. Arcele acestei rețele reprezintă singurele legături directe convenabile, ce pot fi folosite între diferitele puncte ale sistemului. Pe aceste arce sînt scrise timpurile medii de parcurgere a lor,

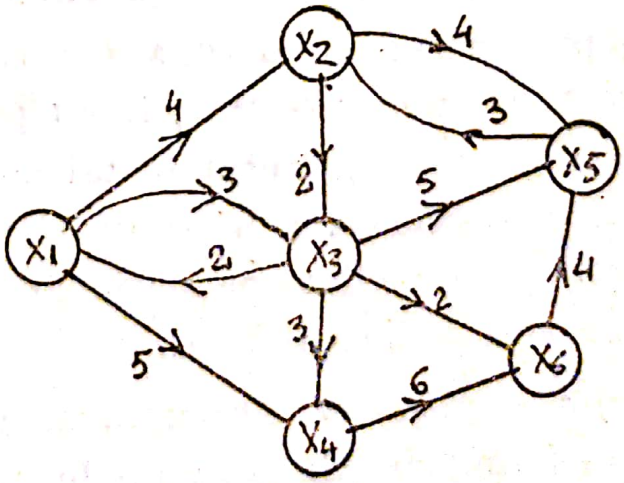


Fig. III.3.37

ce depind de distanțe, de aglomerarea liniilor respective în sensurile folosite etc.

Să se arate din ce punct trebuie să se înceapă aprovizionarea și în ce ordine să fie aprovizionate cele șase puncte, astfel încît timpul total de pe parcurs să fie minim.

Indicație și răspuns. Graful din figura III.3.37 conține opt drumuri hamiltoniene, ce sînt trecute în tabelul III.3.61. În acest tabel sînt calculate valorile acestor drumuri. Cel mai scurt reprezintă soluția problemei:

$$(x_6,\ x_5,\ x_2,\ x_3,\ x_1,\ x_4).$$

Tabelul III.3.61

Nr. crt.	Drum hamiltonian	Timp mediu de parcurs
1	$(x_1, x_3, x_4, x_6, x_5, x_2)$	3+3+6+4+3=19
2	$(x_1, x_4, x_6, x_5, x_2, x_3)$	5+6+4+3+2=20
3	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_5)$	3+2+3+6+4=19
3	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_5)$	3+2+3+6+4=19
4	$(x_2, x_3, x_1, x_4, x_6, x_5)$	2+2+5+6+4=19
5	$(x_3, x_1, x_4, x_6, x_5, x_2)$	2+5+6+4+3=20
6	$(x_4, x_3, x_5, x_2, x_3, x_1)$	6+4+3+2+2=17
7	$(x_5, x_2, x_3, a_1, x_4, x_6)$	3+2+2+5+6=18
8	$(x_6, x_5, x_2, x_3, x_1, x_4)$	4+3+2+3+5=16

10. *Problemă de lansare.* Pe o anumită mașină se pot executa șapte tipuri de produse, $x_i (i = 1, 2, \ldots, 7)$. Trecerea de la executarea unui produs x_i la alt produs x_j se face cu un cost de lansare C_{ij}, trecut în tabelul III.3.62, la intersecția liniei i cu coloana j. Să se găsească ordinea de prelucrare a celor șapte produse pe mașină, care să corespundă la cel mai mic cost de lansare total.

Indicație și răspuns. Deoarece numărul combinațiilor care se pot forma cu cele șapte produse, modificînd ordinea

Tabelul III.3.62

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_5
x_1	0	5	4	4	3	3	3
x_2	4	0	4	4	4	4	5
x_3	3	5	0	5	4	6	4
x_4	5	5	6	0	3	5	4
x_5	2	6	5	4	0	4	6
x_6	2	5	4	4	3	0	7
x_7	2	3	5	3	6	0	4

lor, este foarte mare, respectiv $P_7 = 7! = 5\,040$, putem elimina de la început succesiunile strict dezavantajoase în privința costului de lansare. Comparînd costurile de trecere de la producerea lui x_i la producerea lui x_j și de trecere de la x_j la x_i, adică C_{ij} cu C_{ji}, păstrăm ordinea corespunzătoare costului mai mic și construim un graf în care punem arcul (x_i, x_j) numai dacă $C_{ij} < C_{ji}$. În cazul $C_{ij} = C_{ji}$ se alege una din succesiuni la întîmplare. În exemplul nostru, graful va avea matricea arcelor din tabelul III.3.63.

Tabelul III.3.63

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	0	0	0	0	0	0
x_2	1	0	1	1	1	1	0
x_3	1	0	0	1	1	0	1
x_4	0	0	0	0	1	0	0
x_5	1	0	0	0	0	0	0
x_6	1	0	1	1	1	0	0
x_7	1	1	0	1	1	1	0

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul III.3.64 conține drumurile hamiltoniene în graful obținut, împreună cu valorile calculate ale acestor drumuri. Există cinci drumuri hamiltoniene de cost minim, 20 u.b., adică:

$$DH_1 = (x_2, x_6, x_3, x_7, x_4, x_5, x_1);$$

$$DH_2 = (x_3, x_7, x_2, x_6, x_5, x_1, x_4);$$

$$DH_3 = (x_3, x_7, x_2, x_6, x_1, x_4, x_5);$$

$$DH_4 = (x_3, x_7, x_2, x_6, x_4, x_5, x_1);$$

$$DH_5 = (x_6, x_3, x_7, x_2, x_4, x_5, x_1).$$

Observație. Metoda folosită este o metodă aproximativă, însă destul de bună pentru aplicarea practică.

Tabelul III.3.64

Nr. crt.	Drum hamiltoian	Cost de lansare total
1	$(x_2, x_3, x_7, x_6, x_5, x_1, x_4)$	$4+4+6+3+2+4=23$
2	$(x_2, x_3, x_7, x_6, x_4, x_5, x_1)$	$4+4+6+2+4+3=23$
3	$(x_2, x_3, x_7, x_6, x_4, x_5, x_1)$	$4+4+6+4+3+2=23$
4	$(x_2, x_6, x_3, x_7, x_5, x_1, x_4)$	$4+4+4+4+2+4=22$
5	$(x_2, x_6, x_3, x_7, x_1, x_4, x_5)$	$4+4+4+2+3+4=21$
6	$(x_2, x_6, x_3, x_7, x_4, x_5, x_1)$	$4+4+4+3+3+2=20$
7	$(x_3, x_7, x_2, x_6, x_5, x_1, x_4)$	$4+3+3+3+2+4=20$
8	$(x_3, x_7, x_2, x_6, x_1, x_4, x_5)$	$4+3+3+2+4+3=20$
9	$(x_3, x_7, x_2, x_6, x_5, x_4, x_1)$	$4+3+4+4+3+2=20$
10	$(x_6, x_3, x_7, x_2, x_5, x_1, x_4)$	$4+4+3+4+2+4=21$
11	$(x_6, x_3, x_7, x_2, x_1, x_4, x_5)$	$4+4+3+4+4+3=22$
12	$(x_6, x_3, x_7, x_2, x_4, x_5, x_1)$	$4+4+3+4+3+2=20$
13	$(x_7, x_2, x_6, x_3, x_5, x_1, x_4)$	$3+4+4+4+2+4=21$
14	$(x_7, x_2, x_6, x_3, x_1, x_4, x_5)$	$3+4+4+3+4+3=21$
15	$(x_7, x_2, x_6, x_3, x_4, x_5, x_1)$	$3+3+4+5+3+2=31$

11. Cunoscînd distanțele, exprimate în kilometri, între cele șapte magazine de desfacere, fabrica producătoare trebuie să aleagă pentru mașinile de transport traseul cel mai

Scanned with OKEN Scanner

scurt, care să treacă pe la toate cele șapte magazine. Datele sînt conținute în matricea din tabelul III.3.65 (s-au trecut numai jumătate din elemente, celelalte se obțin prin simetrie: $v_{ij} = v_{ij}$).

Tabelul III.3.65

V:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	2	3	11	18	14	12
x_2		0	20	8	16	10	14
x_3			0	15	5	4	3
x_4				0	13	7	10
x_5					0	24	19
x_6						0	8
x_7							0

Să se determine acest traseu.

Răspuns. Modelul este un graf neorientat, complet, cu șapte noduri, deci admite $\frac{7!}{2} = \frac{5\,040}{2}$ lanțuri hamiltoniene Trebuie găsit un LHM. Aplicînd algoritmul euristic, se obțin cele două lanțuri din figura III.3.38.

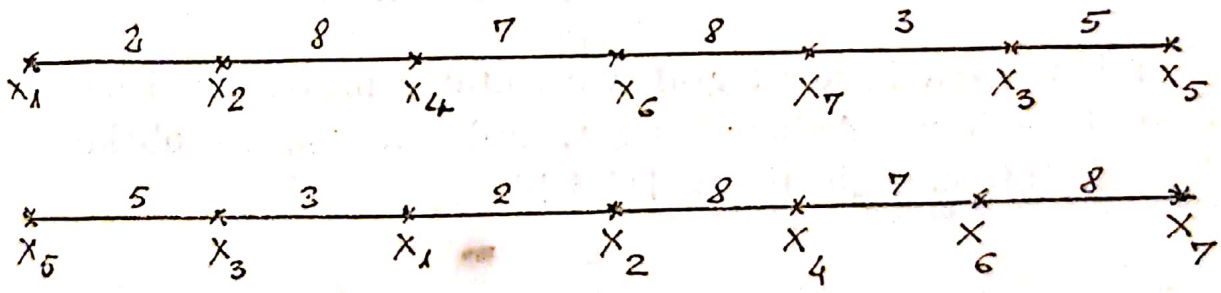


Fig. III.3.38

12. Trebuie să se colecteze ambalajele de la cinci magazine, cu o mașină. Notînd magazinele x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, iar fabrica ce colectează ambalajele cu x_6 și cunoscînd distanțele între toate aceste unități, să se stabilească traseul optim

pentru mașina care pleacă din fabrica x_6, colectează ambalajele de la toate magazinele și se reîntoarce cu ele la fabrică. Datele sînt conținute de tabelul III.3.66.

Tabelul III.3.66

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	10	7	2	12	9
x_2	10	0	5	3	13	11
x_3	8	5	0	2	8	12
x_4	2	3	2	0	4	7
x_5	12	13	8	4	0	10
x_6	9	11	12	7	10	0

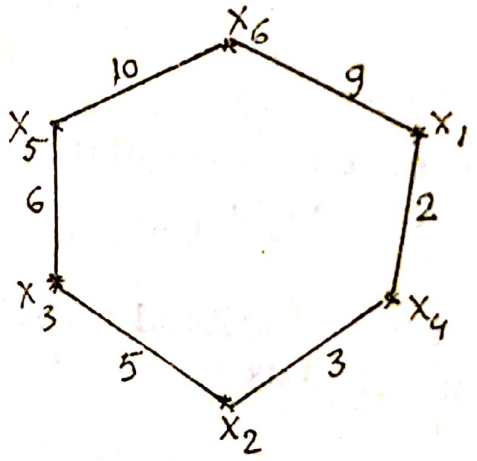


Fig. III.3.39

Trebuie găsit în acest graf neorientat complet ciclul hamiltonian minim. Aplicînd algoritmul euristic, se obține ciclul hamiltonian din figura III.3.39.

1. Cerchez, M. — Aplicații ale matematicii în practică. Ed. did. și ped., 1975.
2. Cerchez, M. — Metode numerice în algebra liniară. Ed. tehnică, 1977.
3. Ernest, D. — Elemente de programare liniară. Ed. did. și ped., 1971.
4. Harary, F., Norman, Z., Cartwright, D. — Structural models, an introduction to the theory of directed graphs. John Willey, 1965.
5. Ionescu, H., Dinescu, C., Săvulescu, B. — Probleme ale cercetării operaționale. Ed. did. și ped., 1972.
6. Kaufmann, A. — Metode și modele ale cercetării operaționale, Ed. științifică, 1967, vol. II.
7. Moisil, Gr. C. — Elemente de logică matematică și de teoria mulțimilor. Ed. științifică, 1968.
8. Tiberiu, I. — Grafuri, aplicații. Ed. did. și ped., 1974.
9. Tomescu, I. — Introducere în combinatorică. Ed. tehn., 1972.
10. Teodorescu, N. și colectiv, — Culegere de probleme de matematici aplicate. Soc. de științe matematice din R.S.R., 1976.
11. Văduva, I. și colectiv, — Modele matematice de organizarea și conducerea producției, vol. I. și II. Ed. did. și ped., 1974—1975.

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Prefață 5

Capitolul I
PROPOZIȚII. MULȚIMI. MATRICE

I.1. Introducere 7
I.2. Propoziții 7
I.3. Mulțimi și submulțimi 19
I.4. Operații cu mulțimi 28
I.5. Mulțimi de numere 46
I.6. Matrice 58

Capitolul II
ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ

II.1. Spații liniare n-dimensionale 66
II.2. Mulțimi de soluții ale unui sistem de ecuații liniare 104
II.3. Două aplicații de interes practic 141
a) Probleme de repartizare 141
b) Probleme de distribuire 173

Capitolul III
ELEMENTE DE TEORIA GRAFURILOR

III.1. Noțiuni generale despre grafuri 221
III.2. Transport pe rute minimă 258
III.3. Transport pe trasee hamiltoniene 294

Bibliografie 365

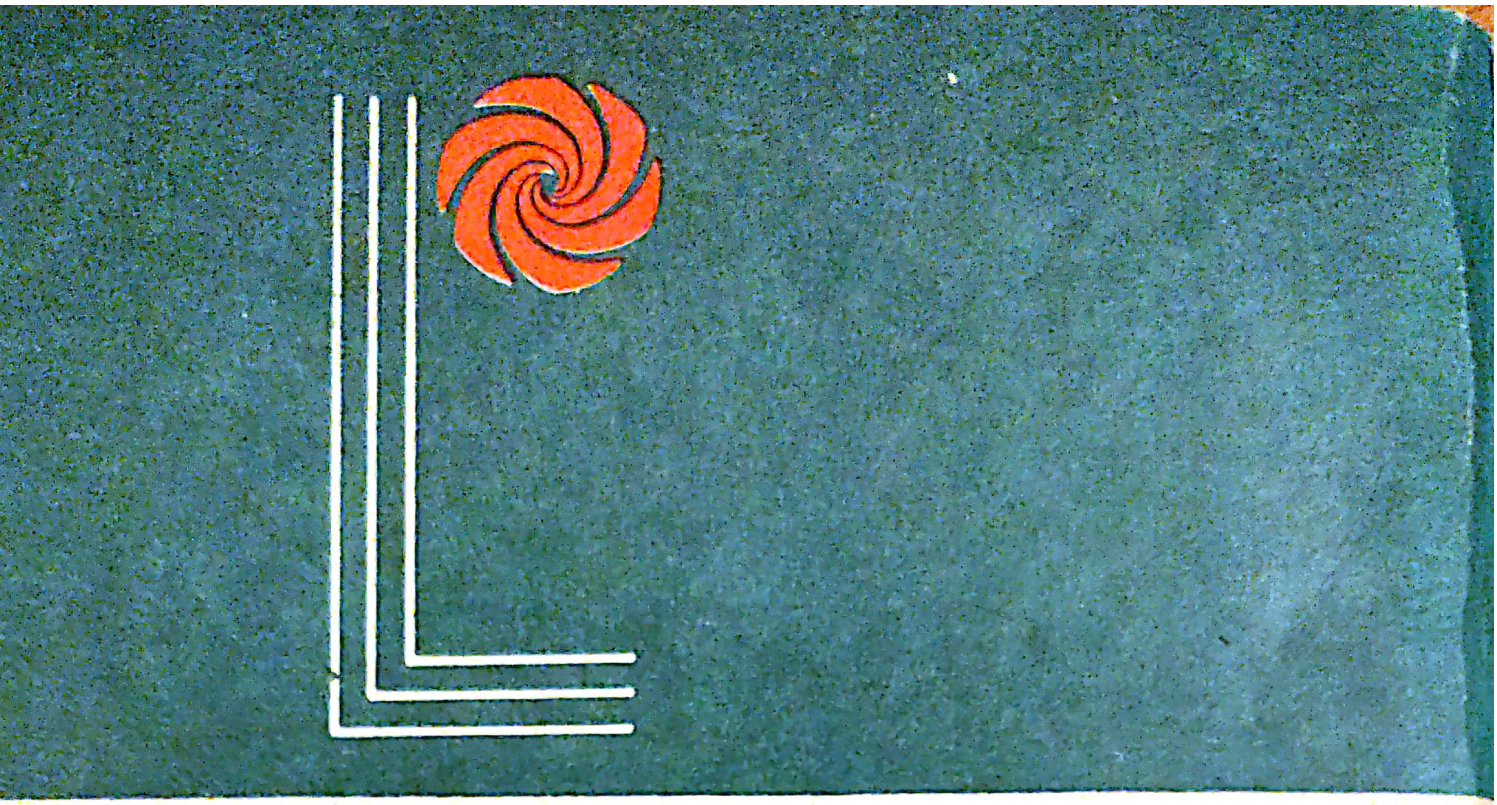
Scanned with OKEN Scanner

Lector : GHEORGHE FOLESCU
Tehnoredactor : GABRIELA ILIOPOLOS

Bun de tipar : 13.IV.1984. Apărut 1984.
Comanda nr. 2385. Coli de tipar 23.

Comanda nr. 30 622
Combinatul poligrafic „Casa Scînteii"
Piața Scînteii nr. 1 — București,
Republica Socialistă România

Scanned with OKEN Scanner



Adresîndu-se elevilor din liceele de orice profil, volumul contribuie la realizarea unei mai bune înțelegeri și a unei legături mai profunde între matematica predată în școală și aplicațiile sale în practică.

Prin accesibilitatea textului și accentuarea unor teme de mare actualitate — matrice, spații vectoriale și grafuri —, lucrarea reprezintă un instrument deosebit de util pentru cei care studiază aceste domenii ale matematicii.

Scanned with OKEN Scanner